$$\det\left(\int_{\Gamma_j} \exp\left(P(X^{-1})\right) Q_i(X)\, dX\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \qquad y=0$$

$$\downarrow$$

$$\det\left(\int_{\Gamma_j} \exp\left(P(X^{-1})+XY\right) Q_i(X)\, dX\right)_{\substack{i=1,\dots,n+1\\ j=1,\dots,n+1}} \qquad y \text{ près de } 0$$

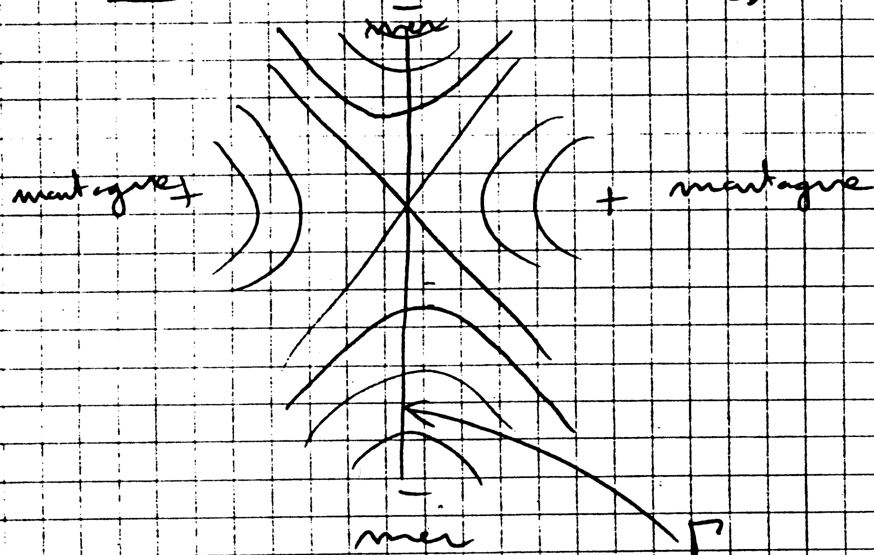
(si on se débrouille bien)

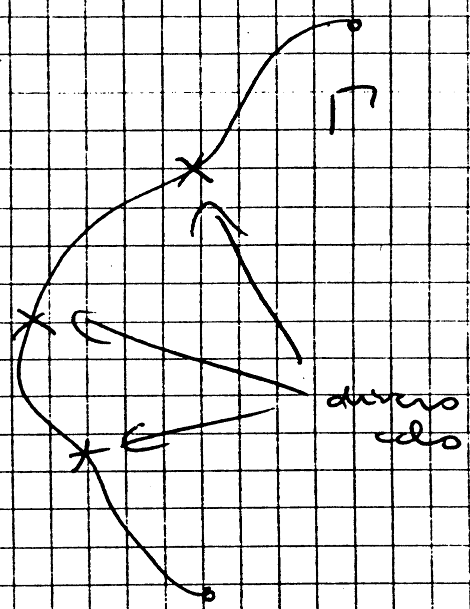
$\Updownarrow$ équation diff. = Wronskien $\Rightarrow$ constante du det

y près de ∞

<u>Méthode du col</u> $\displaystyle\int_\Gamma \underbrace{\exp(F(x))}_{\text{terme dominant}} \varphi(x)\, dx$

<u>Re F</u> dessinée là où $F'(x_0)=0$ et $|F''(x_0)| \gg 0$



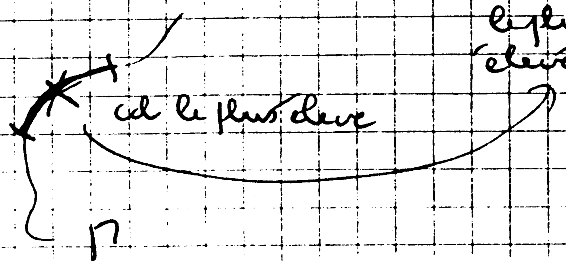


seul compte le col le plus élevé et alors seul compte l'intégrale au voisinage du col

$$\int_\Gamma \exp(F(x))\, \varphi(x)\, dx \simeq \varphi(x_0) \int_{\substack{\text{col}\\ \text{le plus}\\ \text{élevé}}} \exp(F(x_0))\, \exp\left(\frac{F''(x_0)}{2}(x-x_0)^2\right) dx$$

$$\cong \ast \int_\ast^\ast e^{-x^2/2}\, dx$$

$$\cong \ast \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$



On approche donc l'intégrale par ②

$$\varphi(x_0) \exp(F(x_0)) \left(-\frac{F''(x_0)}{2}\right)^{1/2} \sqrt{\pi}$$

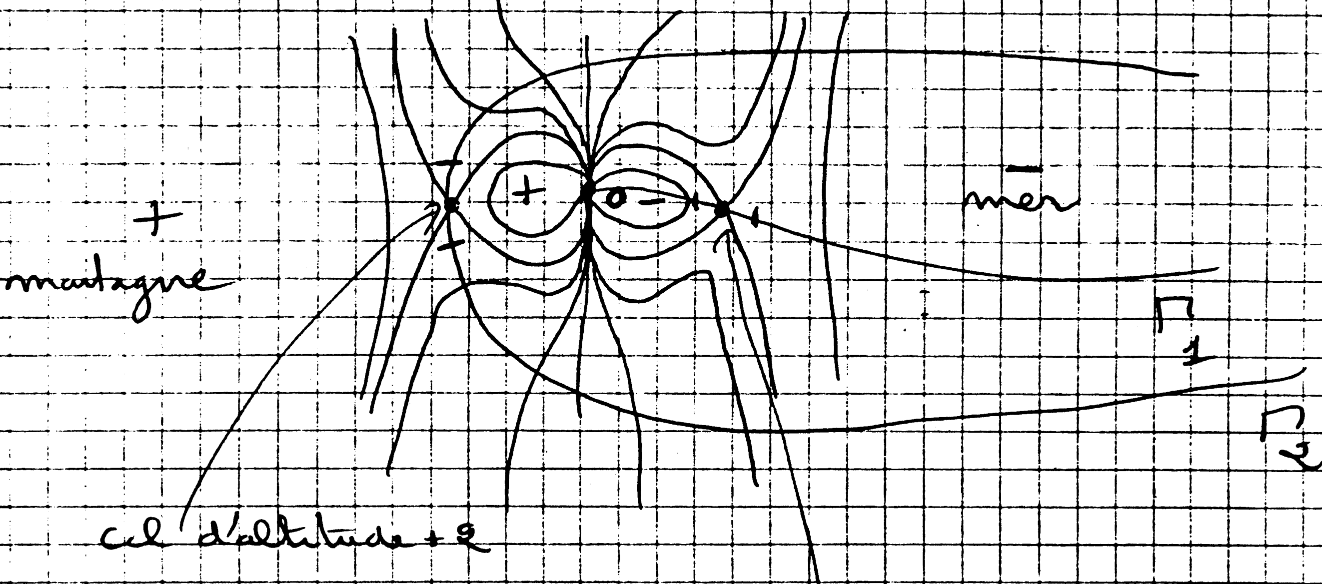
Exemple $\exp(x^{-1} + xy)$

$y = |y| e^{i\theta}$, $(x^{-1} + xy) = |y|^{1/2} \left((|y|^{1/2} x)^{-1} + (|y|^{1/2} x) e^{i\theta} \right)$

$= |y|^{1/2} (X^{-1} + X e^{i\theta})$

$X = |y|^{1/2} x$

dessin pour $\theta = 0$: $-\mathrm{Re}(x^{-1} + x)$



Cas général $P(X^{-1}) + XY$, $\partial_X P(X^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} b_i X^{-i-1}$

$\partial_X (P(X^{-1}) + XY) = \sum_{i=1}^{n} b_i X^{-i-1} + Y = 0$

$\Longleftrightarrow$ grosso modo à $x \sim \left(-\frac{y}{b_n}\right)^{-1/n+1}$

$1+n$ racines

(i.e. $n+1$ col)

$$\det \int_{\Gamma} \exp(P(x^{-1}) + xy)\, x^i\, dx$$

$$\sim \det \int_{col} \rule{4cm}{0.4pt} \quad ?$$

Γ_i chemin passant par le col

x_i cols $\Longrightarrow$ contribution des cols au déterminant

$$\oint \det \left[\exp\left(P(x_i^{-1}) + x_i y\right) \varphi_j(x_i) \sqrt{\pi} \left[\frac{\partial_x^2 \left(-P(x_i^{-1}) + x_i y\right)}{2} \right]^{-1/2} \right]$$

$$\prod_i \exp\left(P(x_i^{-1}) + x_i y\right) \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left[\quad \right]^{-1/2} \det\left(\varphi_j(x)\right)$$

On sait que ce que l'on veut calculer est une constante $\neq$ en y, donc on doit estimer à l'ordre les quantités qui interviennent $*(1+o(1))$ quand $y \to \infty$

On obtient finalement, pour $\varphi_j = x^j \quad -(n+1) \leq i \leq -1$

$$(2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{b_n^{\frac{n+1}{2}}} (-1)^{n^2/2} \cdot (n+1)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \prod_i \exp\left(P(x_i^{-1}) + x_i y\right) \cdot (1+o(1))$$

quand $y \to \infty$

(y a disparu dans les premiers termes car on a bien choisi la base)

$$\exp\left(\sum_i P(x_i^{-1}) + x_i y\right)$$

$$Q_y(x) = P(x^{-1}) + xy$$

$$\sum_{\partial_x Q_y = 0} Q_y(x) = \sum_{\partial_x Q_y = 0} \mathrm{Res}_x\left(Q_y(x) \, d\log(\partial_x Q_y)\right)$$

$$= -\mathrm{Res}_0 - \mathrm{Res}_\infty$$

(par le théorème des résidus)

$\mathrm{Res}_\infty = 0$

Res_0 est indépendant de y (ce à quoi on pouvait s'attendre)

$$\Longleftrightarrow \sum_i x_i = 0$$

on peut donc pour calculer Res_0 remplacer y par 0 et

$$\prod_i \exp\left(P(x_i^{-1}) + x_i y\right)$$

$$= \exp\left(-\mathrm{Res}_0\left(P(x^{-1}) . d\log \partial_x P(x^{-1})\right)\right)$$

$\eta(x) = \partial_x P(x^{-1})$

$$\sum b_i x^{-i-1} = b_n x^{-n-1} \underbrace{\left(1 + \sum \cdots\right)}_{\{\eta\}}$$

$$= \exp\left(-\mathrm{Res}_0\left(\int \eta\, dx \,.\, d\log\left(b_n x^{-n-1} \{\eta\}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\mathrm{Res}_0\left(\int \eta\, dx \,.\, d\log\{\eta\}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\mathrm{Res}_0\left(\eta \,.\, \log\{\eta\}\, dx\right)\right)$$

$$\exp(P(x^{-1})) = \cancel{\;} \exp\left(\int \eta\, dx\right)$$

$$\det\left(\int_{\Gamma_i} \exp\left(\int \eta\, dx\right) . Q_j(x)\, dx\right)$$

$$= (2\pi)^{\frac{n+1}{2}} \exp \mathrm{Res}_0\left(\eta \log\{\eta\}\, dx\right) (b_{n+1})^* \sqrt{\mathrm{rat}_n}$$

Analogie car $0 \Longleftrightarrow \infty$

$$\exp(P(x^{-1})) \Longleftrightarrow \mathcal{L}_\psi(P(x^{-1})) \quad , \psi : \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$$

localement en 0, on a

$$\mathcal{L}_\psi(P(x^{-1}))|_{\bar\eta_0} \Longleftrightarrow \text{caractère de } k((x))^* \xrightarrow{\chi} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$$

constante locale

$$\int_{k((t))^*} \chi^{-1}(Q)\, \Psi(Q)\, dQ$$

$$\Psi(Q) = \psi\left(\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_p} \mathrm{Res}\,(Q\, dx)\right)$$

$$\chi(Q) = \psi\left(\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}\left(P(x^{-1})\, \frac{dQ}{Q}\right)\right)\right)$$

$$\int_{k((x))^\times} \chi^{-1}(Q)\, \Psi(Q)\, dQ \qquad \left(\text{dans le cas sauvagement ramifié}\right)$$

χ de conducteur a , 1 sur $1+(\pi)^a$

ψ ——— $n(\psi)$, 1 sur $(x)^{-n(\psi)}$

$a = 2\alpha$ ou $2\alpha - 1$, $Q \mapsto Q(1+y)$, $y \in (\pi)^\alpha$

$$(1+y)(1+y') = 1 + y + y' + yy'$$

$2\alpha = a$ ou $a+1$

mais on doit s'intéresser aux Q_y tels que

$$\chi(1+y) = \psi(Q_y)$$

seulement $\left(\int_G \text{caractère non trivial de } G = 0\right)$

Si $a = 2\alpha$, $\int_{k((x))^\times} \chi^{-1}(Q)\, \psi(Q)\, dQ$ est simplement une valeur en un Q particulier comme ci-dessus.

Corps de classe géom. ds le cas complexe

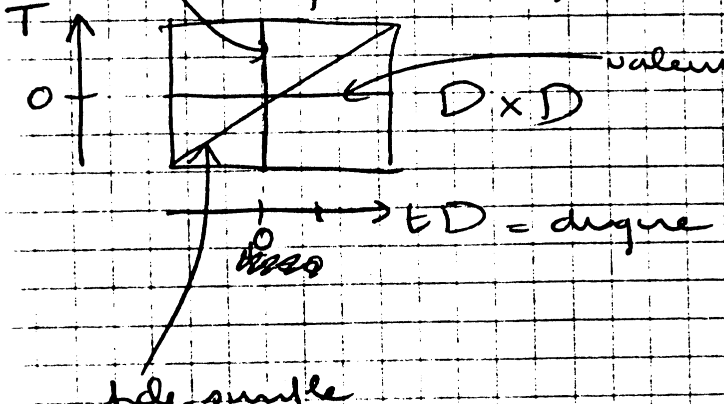
$$\mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[[t]])$$
$$\cup$$
$$\mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}((t))) \qquad \mathbb{C}((T))^* \text{ groupe proalgébrique sur } \mathbb{C}$$

un élément de $\mathbb{C}((T))^\times$ s'écrit

$$T^n \cdot \lambda \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i T^i\right)$$

$$\mathbb{C}((T))^\times = \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^\times \times \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}$$

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}((t))) \longrightarrow \mathbb{C}((T))^\times$$



$$t \longmapsto \frac{T}{T-t} = \frac{-Tt^{-1}}{1-Tt^{-1}} = T \cdot (-t^{-1}) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (Tt^{-1})^i$$

$$\left(n=1,\ \lambda = (-t^{-1}),\ c_i = t^{-i}\right)$$

$I \Rightarrow k$

$k/\mathbb{F}_p$ Si H = groupe fini commutatif (discret sans él. nilpotent) on a une équivalence entre H torseurs sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}((t)))$ et extension de $\mathbb{C}((T))^\times$ par H (cf. vieille lettre de Grothendieck)

(si on permet des nilpotents, il faut considérer les H-torseurs sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}((t)))$ modulo ceux qui se prolongent à $\mathbb{C}[[t]]$ et trivialisé en 0 ?; il serait mieux alors considérer les $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i t^i$ avec c_i nilpotent pour $i \neq i_0$, c_{i_0} inversible n'importe quoi après)

$k = \mathbb{C}$ $\mathcal{L}$ module à connexion sur $\mathbb{C}((t))$ de rang 1

$\longleftrightarrow$ extension de $\mathbb{C}((T))^\times$ par $\mathbb{G}_m$

$+\ \nabla$-structure