Deligne 5/6/1984

①

$P(X^{-1})$, $\eta = d(P(X^{-1})) = \sum_{i=1}^{n} b_i X^{-i-1} dX$

$\det \int_{\Gamma_j} \exp(P(X^{-1})) . X^i \, dX$, $i \in [\ ,\ ]$

$= \exp(- \mathrm{Res}_0 (P(X^{-1}) . d\log(\eta/dx)) . b_n^{A_n} (\mathrm{rat}_n)^{1/2}$

$(A_n \in \mathbb{Z}/2)$

$S =$ trait complet / $\mathbb{C}$ $= \mathrm{Spec}(A)$, $A \simeq \mathbb{C}[[t]]$

$K = \mathrm{Frac}(A)$

$J(\mathbb{C}) = K^*$ extension de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{C}^*$ par unipotent

$j : S - \{o\} \to J$ (corps de classe : il y a une classe d'application canonique : deux choix j_1, j_2 de j ayant un rapport qui se prolonge à S en envoyant 0 vers 1)

$j \in J(S - \{o\}) / \mathrm{Ker}(J(S) \to J)$

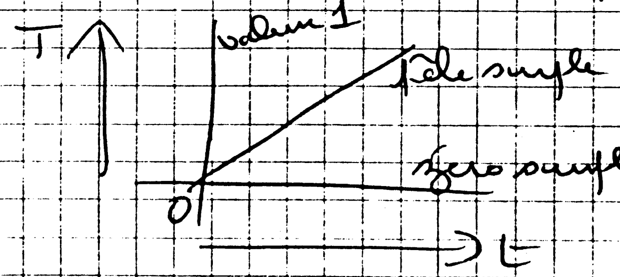
$K^* = J(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}((T))$

$J(B) = (B[[T]](T^{-1}))^*$, $\forall$ $B = \mathbb{C}$-algèbre

$j \in (\mathbb{C}((t))((T)))^*$ et en fait $j \in \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[[t, T]])$

$t \mapsto \frac{T}{T-t} = T.(t^{-1}). \sum (T t^{-1})^n$

$=$ n'importe quel élément de $\mathrm{Frac}(\mathbb{C}[[t,T]])$ tel qu'on ait ; le rapport de deux tels éléments est dans $\mathrm{Ker}(J(S) \to J)$



$F \in J$, $F = T^n \cdot \lambda \cdot \exp\left(\sum_{i \geq 1} c_i T^i\right)$

$n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in G_m$, $c_i \in G_a$

(loi de groupe additive en les c_i)

formes diff invariantes sur J : $\frac{d\lambda}{\lambda}$, dc_i

__Proposition__ j^* induit une bijection

$$\varinjlim_n \left(\mathcal{L}ie(J_n)^\vee\right) = \Omega^1_{J,1} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{S-\{0\}} / \Omega^1_S$$

$$\left(J = \varprojlim_n J_n\right)$$

__Preuve__ $\frac{T}{T-t} = -T t^{-1} \exp \log \frac{1}{1 - Tt^{-1}}$

$$= -T \cdot t^{-1} \exp\left(\sum_n \frac{(Tt^{-1})^n}{n}\right)$$

$$t \longmapsto \begin{cases} n = 1 \in \mathbb{Z} \\ \lambda = -t^{-1} \in G_m \\ c_i = \frac{t^{-i}}{i} \in G_a \end{cases}$$

$$d\lambda \longmapsto -\frac{dt}{t}$$

$$dc_i \longmapsto -t^{-i-1} dt$$

4 - extension de J par G_m

a) extension de J par G_m (nécessairement triviale)

donc de la forme $J \times G_m$ mais avec automorphismes

$\times \mu^m \times \lambda^m$ $\left(\lambda : J \to G_m,\ \mu : G_m \xrightarrow{id} G_m\right)$ (?)

b) 4-structure après trivialisation : forme diff. invariante

(vue comme ∇ ? automatiquement intégrable), changer de triv remplace $\frac{\nabla 1}{1}$ par $\frac{\nabla 1}{1} + m\frac{d\lambda}{\lambda}$

fibré de rg 1 à connexion sur $S - \{0\}$

$\mathcal{L} = \mathcal{O}$, $\nabla 1 / 1 = \omega$ forme diff.

$(\mathcal{O},\omega) \simeq (\mathcal{O},\omega') \Rightarrow \omega' = \omega \pm df/f$

Variante. Le foncteur j^* induit une équivalence de catégorie entre $\natural$-extension de J par $\mathbb{G}_m$ et fibré à connexion.

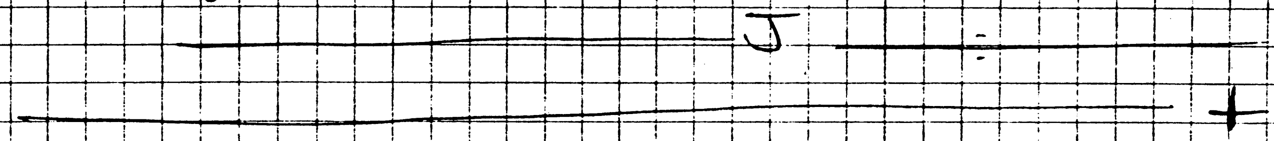
Rmq $j_1 j_2^{-1} = \delta : \begin{matrix} S \to J \\ 0 \mapsto 1 \end{matrix}$, $j_1, j_2 : S-\{0\} \to J$

$$j_1^* = j_2^* \otimes \delta^*$$

avec δ^* canoniquement trivial (on a tout trivialisé en 1 sur J et donc $\delta^*(-)$ trivialisé en 0 - - -)

j^* ne dépend pas du j utilisé

Rmq. Trivialiser l'extension sur J^0 correspond à se donner un prolongement comme faisceau inversible de $\mathcal{L}$



une trivialisation en 0 de la fibre de $\mathcal{L}$

Solutions de $\natural$-ext. de J par $\mathbb{G}_m$

$$(J \times \mathbb{G}_m, \omega) \to (J \times \mathbb{G}_m, \omega')$$

$$\iff x : J \to \mathbb{G}_m \text{ avec } \omega' - \omega = \frac{dx}{x}$$

Exemple qui nous intéresse

$\mathcal{O}$, $\nabla 1 = \eta = d(P(x^{-1})) = \sum b_i t^{-i-1} dt$

section horizontale $\iff 1 = \exp P(x^{-1})$ horizontale

$j : t \mapsto (1, -t^{-1}, \frac{t^{-i}}{i}) = (\eta, \lambda, c_i)$

$\eta = j^*(-\sum b_i dc_i) = j^*(-d(\sum b_i c_i))$

$-\sum b_i c_i = -\mathrm{Res}_0(\eta \log\{Q\}) = \mathrm{Res}_0\left(P(t^{-1}) \frac{dQ}{Q}\right)$

$$Q = T^m \lambda \left(\sum \ldots \right) \in J$$

$$\{Q\} = \left(\sum \ldots \right) = \exp\left(\sum a_i t^i \right)$$

$$\exp(P(t^{-1})) = j^* \left(\overset{\exp}{} \left(\mathrm{Res}_0 \left(P(t^{-1}) \frac{dQ}{Q} \right) \right) \right)$$

Q élément général de J

"fonction sur $S - \{0\}$" $= j^*$ "caractère"

caractères = tous les caractères analytiques de $J(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathbb{C}^\times$ (se factorise par un J_n, si $J = \varprojlim J_n$)

"fonction sur $S - \{0\}$" = celles qui sont sol. d'équ. diff d'ordre 1 (sans sing essentielle autres que $\exp P(z^{-1})$ - - ?)

$$\det(\text{périodes}) \overset{\text{essentiellement}}{=} \exp \mathrm{Res}_0 \left(\exp(P(x^{-1})\, d\log(\eta/dx) \right)$$

$$J(\mathbb{C}) = \mathbb{C}((T))^\times$$

caractère $Q \longmapsto \exp\left(\mathrm{Res}_0 \left(P \frac{dQ}{Q} \right) \right)$

à dx on peut attaché un caractère de $\mathbb{C}((T))$

$$Q \longmapsto \exp\left(\mathrm{Res}_0 (Q\,da) \right)$$

$$\mathbb{C}((T))^\times \longrightarrow \mathbb{C}((T))$$

morphisme

structure alg $\sum a_n T^n$

($\varinjlim \varprojlim$?)

) correspond aussi à un "faisceau" qu'on peut restreindre à $\mathbb{C}((T))^\times$

Cas p

calcul de $\int \chi^{-1}(x)\psi(x)\,dx$ en cas $\neq 2$, ~~conducteur~~ sans partie
~~pair~~ modérée !

$$\chi\left(1+y+\frac{y^2}{2}\right)=\psi(ay)$$

$$\chi(a)\,\psi(a)\times \cancel{\sqrt{q}}\, q^{n/2} = \int \chi^{-1}(x)\,\psi(x)\,dx$$

$\uparrow$
gauss

Cas 0

$$\chi(\exp(Q)) = \psi(Q_0 \cdot Q)$$

χ: $1+y+\frac{y^2}{2}$; Q_0: a ; Q: y

$$\exp(\pm \mathrm{Res}_0(P\cdot dQ)) = \exp \mathrm{Res}_0(Q_0\, Q\, dx)$$

$$\exp(\mp \mathrm{Res}_0(dP\cdot Q))$$

$$\boxed{Q_0 = \frac{dP}{dx} = \frac{\cancel{d}\,n}{dx}}$$

$$\det(\text{periodes}) \underset{\uparrow}{=} \exp \mathrm{Res}_0\left(P\, d\log\left(\frac{n}{dx}\right)\right)$$

~~essentiellement~~

$\sqrt{q} \Longleftrightarrow \sqrt{\pi}$ dans le cas de conducteur impair

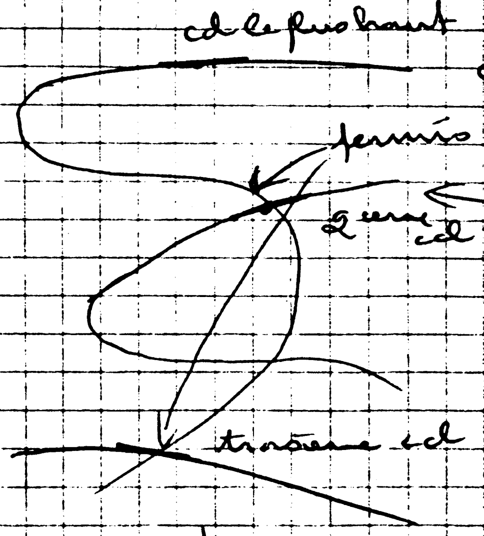
Pb dégager, modulo les sous faits, un cycle dans $J(\mathbb{C})$ sur lequel on pourrait intégrer, faisant par exemple apparaître les $\sqrt{2\pi i}$ comme $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$ et donnant la période locale comme

$$\int_{\text{cycle}} \chi^{-1}(Q)\,\psi(Q)\,dQ \;?$$

$$\int_\Gamma \exp\left(P(X^{-1}) + XY\right) . X^i \, dX$$

cols : zéros de $\partial_x \left(P(x^{-1}) + xy\right)$

ordonnée par $R\left(P(x^{-1}) + xy\right)$



chemin passant par le col le plus haut et éventuellement par des cols plus bas

chemin passant par le col mais pas par des cols plus haut

$$x \sim \left(\frac{-y}{b_n}\right)^{-1/n+1}$$

$$P(x^{-1}) + xy = |y|^{\frac{n}{n+1}} \cdot \left(P_{|y|}\left(\left(x|y|^{\frac{1}{n+1}}\right)^{-1}\right) + x\,|y|^{\frac{1}{n+1}} e^{i\theta} \right)$$

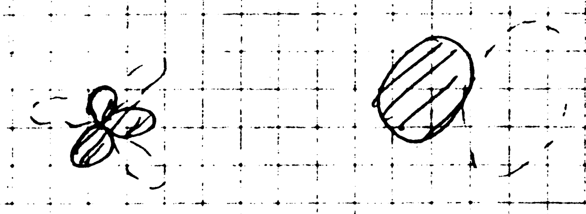
$$X = x \cdot |y|^{\frac{1}{n+1}}$$ nouvelle variable

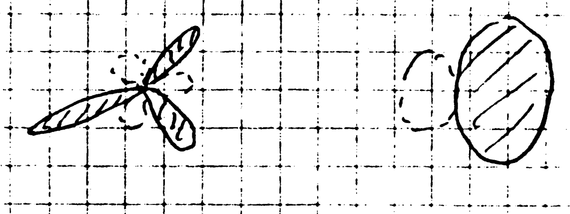
$$\left(\qquad \right) \sim \left(b_n X^{-n} + \dots + X e^{i\theta}\right)$$

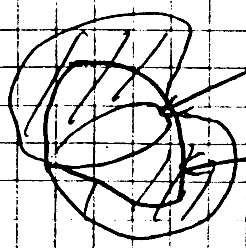
On est amené à regarder la théorie de Morse de la fonction

$$R = \mathrm{Re}\left(b_n X^{-n} + \dots + X e^{i\theta}\right)$$

$R \ll 0$ $\qquad\qquad$ $R \gg 0$






col
nouveau chemin
quand on passe un col