X courbe / $\mathbb{C}$, projective lisse connexe

$S \subset X$ fini

$(\mathcal{V}, \nabla)$ sur $X - S$ module à connexion

$$H_{DR} = \mathbb{H}(X-S, \mathcal{V} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1 \otimes \mathcal{V})$$

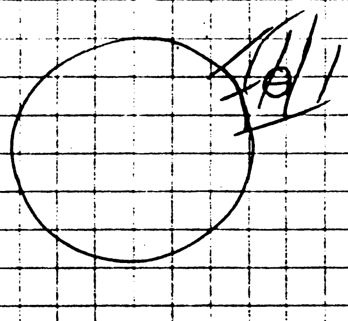
$$\Big(= H\big(\Gamma(X-S, \mathcal{V}) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(X-S, \Omega^1(\mathcal{V}))\big)$$

si $X-S$ affine$\Big)$

H_B : $\hat{X}$ éclaté réel de X le long de S, variété à bord

$\tilde{V}$ sur $\hat{X}$: sur $X-S$, sections horizontales V

$$V^{\leq 0} = \tilde{V} \subset j_* V, \quad j : X - S \hookrightarrow \hat{X}$$



$\tilde{V}_\theta$ = sections horizontales dans un petit secteur centré en θ à croissance modérée

$\big(\mathbb{C}\{\{t\}\} \subset A_\theta$ = fct° holomorphe dans un secteur de plus en plus petit centré en θ

$$\| $$

$$\varinjlim_{\varepsilon \to 0} A_{[\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon]}$$

Rq : 1) $\mathcal{V}$ = $\mathbb{C}\{\{t\}\}$-vectoriel

$$\mathcal{V} \otimes A_\theta \simeq \bigoplus \left(\exp(P(x^{-1/n})) \otimes \mathcal{O}^m \right)$$

2) A_θ ressemble aux fct° sur 0 ——— analytique en dehors de 0 et "$\mathcal{C}^\infty$" en 0

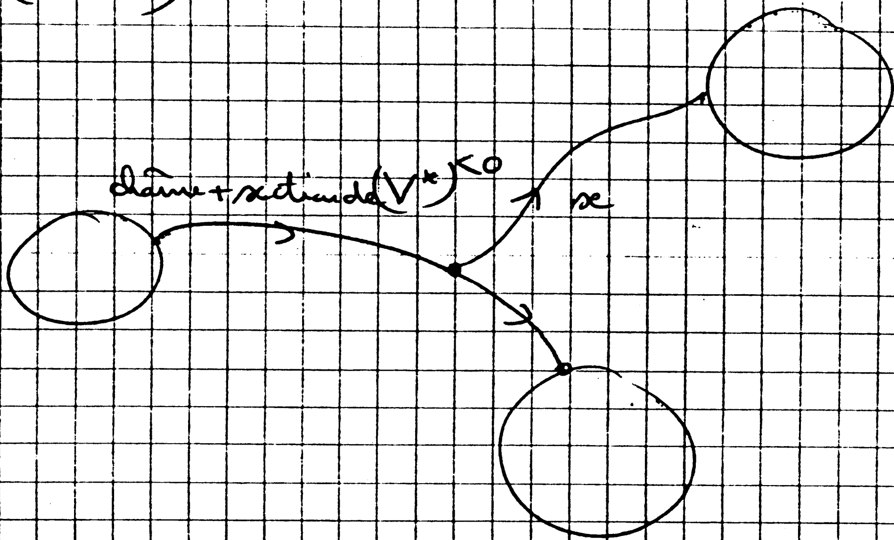
$H_B = H(\tilde{X}, \tilde{V})$

Thm (Malgrange) $H_{DR} \simeq H_B$

"Preuve" $H^{2-*}(\tilde{X}, \tilde{V})^\vee = H^*(\tilde{X}, (V^*)^{<0})$

(≤ 0 croissance modérée ; <0 décroissance rapide (plate en 0))

$H^1(\tilde{X}, (V^*)^{<0})$.



arc $\Longrightarrow$ classe de $H^1_{\{arc\}}(\tilde{X}, \mathbb{Z})$

arc + section système local $\Longrightarrow$ classe de $H^1_{\{arc\}}(\tilde{X}, \text{syst. local})$

$\downarrow$

$H^1(\tilde{X}, \text{syst. local})$

$\langle \underset{\text{section de } V}{\omega}, \overset{\text{combinaison linéaire}}{\text{arc} + \text{section de } (V^*)^{<0}} \rangle = \sum \int_{\text{arc}} \langle \omega, \text{section de } (V^*)^{<0} \rangle$

Rq si V régulier, on a

$H^*(\tilde{X}, \tilde{V}) = H^*(\tilde{X}, j_* V)$

$H^*(\tilde{X}, (V^*)^{<0}) = H^*_c(X-S, V)$

pour $j : X - S \hookrightarrow \tilde{X}$, on a

$$R^1 j_* = 0$$

(pas comme pour $k : X - S \hookrightarrow X$!!)

V vectoriel sur un corps, $\det V$ = espace vect. gradué

$\det V = \Lambda^{\dim V} V$ en degré $\dim V$

règle de Koszul pour $\otimes$

$$\bigotimes_{i \in I} L_i \simeq \left(\overset{\text{usuel}}{\bigotimes} L_i\right) \otimes \Lambda^{|I|} \mathbb{Z}^{(I)} \qquad (\dim L_i = 1$$

$$\det\left(\bigoplus_{i \in I} V_i\right) \simeq \bigotimes_{i \in I} \det V_i \quad \text{canoniquement}$$

$$\det(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{espace vectoriel gradué}}}{V^*}) = \bigotimes_{i \in I} (\det V_i)^{(-1)^i} \qquad \left(\otimes(L, L^{-1}) = 1 \text{ canonique}\right.$$

On veut

$$\det(H^*_{DR}) \simeq \bigotimes \varepsilon_{DR}(\mathcal{V})$$

$$\det(H^*_B) \simeq \bigotimes \varepsilon_B(\mathcal{V})$$

$+ (\text{IS}) \simeq \otimes (\text{IS})$

$\varepsilon_{DR}(\mathcal{V})$, $\varepsilon_B(\mathcal{V})$ dépendent d'une 1-forme ω locale et on a un tel isomorphisme pour ω global donné

DR

$$X - S \xrightarrow{j} X, \quad \mathbb{H}\left(X, j_* \mathcal{V} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_X(j_* \mathcal{V})\right)$$

$$= H_{DR}$$

$\exists\ \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ réseaux de $j_* \mathcal{V}$ avec

$$(\mathcal{N}_1 \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_2 \otimes \Omega^1) \xrightarrow{\sim} (j_* \mathcal{V} \to j_* \mathcal{V} \otimes \Omega$$

$(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 =$ fibrés vectoriels sur X, $\mathcal{V}_i | X - S = \mathcal{V})$

$\Longleftrightarrow \underline{j_*\mathcal{V}/\mathcal{V}_1 \xrightarrow{\sim} (j_*\mathcal{V}/\mathcal{V}_2) \otimes \Omega^1}$

1) $\varepsilon_{DR}(\mathcal{V}, \omega)_x = \,?$ $\quad (x \in \cancel{X})$ On choisit $\mathcal{V}_1', \mathcal{V}_2'$

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{V}_1' \arrow[r, "\nabla/\omega"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\wr"] & \mathcal{V}_2') \arrow[d, "\times\omega"] \\ (j_*\mathcal{V} \arrow[r] & j_*\mathcal{V} \otimes \Omega^1_X) \end{tikzcd}$$

et

$$\varepsilon_{DR}(\mathcal{V}, \omega)_o = \det(\mathcal{V}_1'/\mathcal{V}_2')$$

$$= \det(\mathcal{V}_1'/\mathcal{W}) \cdot \det(\mathcal{V}_2'/\mathcal{W})^{-1}$$

si $\mathcal{W}$ réseau assez petit

$=$ (ω n'apparait que mod mult par $1 + m$)

__Thm__ $\det \mathbb{H}_{DR}(\mathcal{V}) = \bigotimes_{x \in X} \varepsilon_{DR}(\mathcal{V}, \omega)_x$

on choisit $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ global, $\mathcal{V}_1 \xrightarrow{\nabla/\omega} \mathcal{V}_2$

$$\det \mathbb{H}_{DR}(\mathcal{V}) = \det(H(X, \mathcal{V}_1)) \otimes \det(H(X, \mathcal{V}_2))^{-1}$$

$$= \det(H(X, \mathcal{V}_1/\mathcal{V}_2))$$

$$= \bigotimes_{x \in X} \det \varepsilon_{DR}(\mathcal{V}, \omega)$$

__Dépendance de__ $\varepsilon_{DR}(\mathcal{V}, \omega)$ __en__ ω

$\mathcal{V}$ virtuel de dim $0 \Longrightarrow \det(\mathcal{V})$

<u>Corps de classe global</u> X, S, module m

$$\mathrm{Pic}_c(X-S) = \varprojlim_{m \to \infty} \left(\text{espace fibré inversible trivialisé sur } m\right)$$

$$\begin{array}{rcl} j : X - S & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_c(X-S) \\ x & \longmapsto & \mathcal{O}(x) \end{array}$$

$$j^* : \left(\begin{array}{c}\natural\text{-ext. de } \mathrm{Pic}_c(X-S) \\ \text{par } \mathbb{G}_m\end{array}\right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{c}\text{fibré de rang } 1 \text{ à} \\ \text{connexion sur } X-S\end{array}\right)$$

(cf autodualité de la jacobienne)

$$\begin{array}{ccc} j_s : X_{(s)} - \{s\} & \xrightarrow{\frac{T}{T-t}} & J_{s/\mathbb{C}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ j : X - S & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_c(X-S) \end{array}, \quad J(\mathbb{C}) = \mathbb{C}((T))^\times$$

$f \longmapsto \{fg \mid g \text{ holomorphe hors } s,\ fg \text{ hol en } s\}$ trivialisé en s par f^{-1}

$$\det(V) \longrightarrow \delta V = \natural\text{-ext. de } \mathrm{Pic}_c(X-S) \text{ par } \mathbb{G}_m$$

$$\longrightarrow \delta_s V_{\text{locaux}} = \text{———} \ J_s \ \text{———}$$

<u>localement, on doit avoir</u> (V virtuel de dim 0)

$$\varepsilon_{DR}(V, f\omega)_s = \varepsilon_{DR}(V, \omega)_s \otimes \langle \delta_s V, f \rangle^{-1}$$

fibre de δV en $f \in J(\mathbb{C})$

<u>Rq</u> $\langle \delta V, f \rangle = \bigotimes_s \langle \delta_s V, f \rangle$

$\updownarrow$

fibré trivial

2) Cadre Betti

$\omega = df$, $f : X \to \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\text{"Réel"}} \mathbb{R}$

$$X - f^{-1}(\infty) \to \mathbb{R}$$

$t \in \mathbb{R}$, $t \notin f(S)$

$\tilde{X}_t$ $\{x \mid \mathrm{Re}(f(x)) \leq t\}$ = variété à bord

$\tilde{X} - f^{-1}(\infty)$ $\qquad V_t^{\leq 0} = \begin{cases} V^{\leq 0} \text{ sur } \mathrm{Re}(f(x)) < 1, \\ \text{prolongé par } 0 \end{cases}$

Rq $t \ll 0 \Rightarrow H(\hat{X}_t, V_t^{\leq 0}) = 0$

chaque fois que t franchit une valeur critique, on a chgt de $H(\hat{X}_t, V_t^{\leq 0})$ et un graupe local qui apparaît et

$$\varepsilon_B(V, df)_s = \det(\text{graupe local})$$

$$\varepsilon_B(V, df)_{s_\infty} = \det(\text{diff entre } t \gg 0 \text{ et } \hat{X} \text{ tout entier})$$

$$\det H_B \simeq \bigotimes \varepsilon_B(V, df)$$

(Rq Sur $\mathbb{C}$, on a seul^{t} K_0, K_1)

3) Ici $\dim V = 0$ $\quad \gamma(V, \omega)_s : \varepsilon_{DR}(V, \omega)_s \to \varepsilon_B(V, \omega)_s$?

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes \varepsilon_{DR} & \xrightarrow{\otimes \gamma_s} & \bigotimes \varepsilon_B \\ \wr\!\! & + & \wr\!\! \\ \det H_{DR} & \xrightarrow{\gamma} & \det H_B \end{array} \quad ?$$

Forme de localisation très forte : $\varepsilon_{DR,s}$, $\varepsilon_{B,s}$, γ_s ne dependent que du complété de V en s

(a)

Exemple — En rg 1

$$u = z^{\alpha} A \cdot h$$

local; $\overline{\mathbb{Q}}$ section alg; constante; $\overline{\mathbb{Q}}$ section horiz

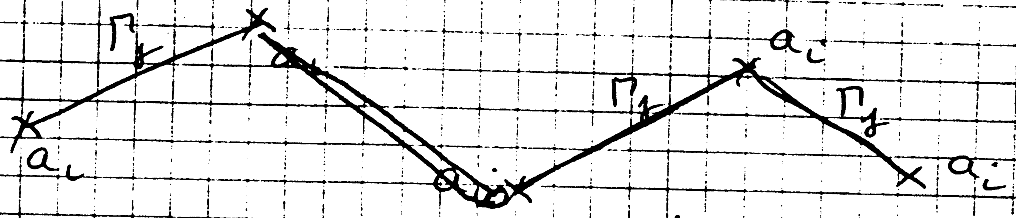
si $v(\omega) = 0$, on a $\gamma_{\text{local}} = A \cdot \Gamma(\alpha) \bmod \overline{\mathbb{Q}}$

$$\prod_i (z-a_i)^{\alpha_i} \text{ naturel}, \quad \sum_i \alpha_i + \alpha_\infty \in \mathbb{Z}$$

a_i algébrique; $\alpha_i, \alpha_\infty \notin \mathbb{Z}$

$$(\mathcal{O}, \nabla), \quad u = \prod (z-a_i)^{\alpha_i} \cdot h$$

u: $\overline{\mathbb{Q}}$-section alg; h: $\overline{\mathbb{Q}}$-section horizontale

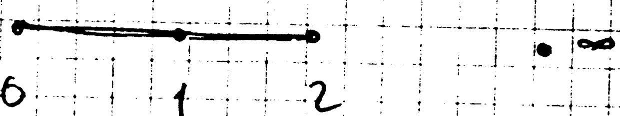


deux arbres ~~deux graphes~~

$\Rightarrow$ Choix de l'homologie

$$\det\left(\int_{\Gamma_j} \prod_i (z-a_i)^{\alpha_i} R_k(z)\, dz\right)_{j,k} \sim_{\bmod \overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_i \Gamma(\alpha_i)$$

$$\chi(\mathbb{P}^1 - 4\,\text{pts}) = -2$$



$H^1 = 2$

a_0 a_n