Journal of the Inst. of Math. Jussieu : page 1 of 23. © Cambridge University Press 1
doi:10.1017/S147474800700014X Printed in the United Kingdom

COMPTAGE DE G-CHTOUCAS : LA PARTIE RÉGULIÈRE ELLIPTIQUE

NGÔ BAO CHÂU[1] AND NGÔ DAC TUÂN[2]

[1] *Université de Paris Sud, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France* (bao-chau.ngo@math.u-psud.fr)
[2] *CNRS—Université de Paris Nord, Département de Mathématiques, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France* (ngodac@math.univ-paris13.fr)

(Reçu le 8 novembre 2005 ; accepté le 6 juin 2006)

Résumé Nous proposons une façon simple de compter le nombre de G-chtoucas de Drinfeld avec modifications arbitraires, inspirée par les travaux de Kottwitz sur les variétés de Shimura.

Abstract We propose a simple method to count the number of Drinfeld G-shtukas with arbitrary modifications which is inspired by works by Kottwitz on Shimura varieties.

Mots clés : chtoucas de Drinfeld ; l'espace de modules ; formules des traces

Keywords: Drinfeld shtukas; moduli space; trace formula

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 22E

Introduction

La correspondance de Langlands pour le groupe GL_n sur un corps de fonctions a été établie en toute généralité par Lafforgue par le biais d'une étude de la cohomologie de l'espace de modules de chtoucas de Drinfeld (cf. [**10**]). Un ingrédient important de son travail est le comptage des points de l'espace de modules de chtoucas. Dans ce travail, on se propose de généraliser le comptage des chtoucas dans un cadre très général des G-chtoucas avec modifications arbitraires (cf. [**3**, **17**]). Nous proposons une méthode de comptage plus simple que celle de Lafforgue (cf. [**9**]). Elle est plus proche du comptage de Kottwitz des points des variétés de Shimura (cf. [**7**, **8**]), mais elle est aussi plus simple à cause des simplifications dans le cas des corps de fonctions. Dans ce travail, nous allons nous restreindre à la partie régulière elliptique, mais la méthode semble générale.

Nous sommes motivés par la possibilité d'établir certains cas de fonctorialité par le biais de comparaison de cohomologie de différents espaces de modules de chtoucas de la même façon que celle suggérée Langlands qui consiste à comparer des formules des traces. Ce programme a été mené à bien dans le cas le plus simple concernant le changement de base cyclique pour une forme intérieure de GL_n (cf. [**11**]). Pour essayer d'autres cas plus intéressants, nous aurons besoin entre autres d'une formule de comptage générale, établie dans ce travail et d'une compactification. Dans le cas des GL_n-chtoucas avec des modifications simples, cette compactification a été construite par Lafforgue généralisant la compactification de Drinfeld dans le cas GL_2. Ngô Dac Tuân a construit une compactification pour les GL_n-chtoucas avec des modifications arbitraires à l'aide de la théorie géométrique des invariants (cf. [**13**]). Cette méthode devrait se généraliser à d'autres groupes.

1. Notations

1.1. Dans ce texte, on fixe une fois pour toutes une courbe projective lisse géométriquement connexe X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de corps de fonctions F. Pour toute place x de F, on note F_x le complété x-adique de F, et $\mathcal{O}_x$ son anneau des entiers. Fixons aussi une clôture algébrique k de $\mathbb{F}_q$, et on notera $\bar{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} k$.

1.2. Soit G un groupe réductif quasi-déployé connexe sur F dont le groupe dérivé G_{der} est simplement connexe, ce qui permet d'utiliser un résultat de Steinberg et Kottwitz (cf. [**5**]). Cette hypothèse n'est pas indispensable, nous la supposons pour simplifier l'exposition.

Supposons que G peut s'étendre en un schéma en groupes que l'on note encore par G lisse sur X de fibres réductives.

1.3. Tous les schémas et tous les champs considérés seront sur $\mathbb{F}_q$. Soient Y et Z deux tels objets, $Y \times Z$ désignera le produit fibré $Y \times_{\mathbb{F}_q} Z$.

2. Champ de G-chtoucas

2.1. Modifications des G-torseurs

On considère le champ Fib_G des G-torseurs sur la courbe X. À chaque schéma S, il associe l'ensemble des G-torseurs sur $X \times S$. On adopte la convention que G agit à droite sur les G-torseurs de sorte que le schéma en groupes des automorphismes d'un G-torseur est une forme intérieure de G.

Soit I un niveau de X, autrement dit un sous-schéma fermé fini de X. On note $\mathrm{Fib}_{G,I}$ le champ des G-torseurs munis d'une structure de niveau en I. À chaque schéma S, il associe l'ensemble des G-torseurs $\mathcal{G}$ sur $X \times S$ munis d'un isomorphisme

$$\mathcal{G}|_{I \times S} \xrightarrow{\sim} G(\mathcal{O}_I) \times S.$$

Soit $\bar{T}$ un sous-schéma fini de $\bar{X}$, et soient $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ deux G-torseurs sur $\bar{X}$. *Une $\bar{T}$-modification de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$* est un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{V}|_{\bar{X}-\bar{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}'|_{\bar{X}-\bar{T}}.$$

Soit $\bar{x}$ un point géométrique dans $\bar{T}$. On note $\mathcal{O}_{\bar{x}}$ le complété de $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ en $\bar{x}$, et $F_{\bar{x}}$ son corps des fractions. Étant donnée une $\bar{T}$-modification

$$\phi : \mathcal{V}|_{\bar{X}-\bar{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}'|_{\bar{X}-\bar{T}}$$

entre deux G-torseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$, on a un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V'$ entre les fibres génériques de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{V}'$ qui à son tour induit un isomorphisme $V_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} V'_{\bar{x}}$ entre les complétés de V et V' en $\bar{x}$. Le complété de $\mathcal{V}$ en $\bar{x}$ définit un $G(\mathcal{O}_{\bar{x}})$-réseau (c'est-à-dire un élément de $G(F_{\bar{x}})/G(\mathcal{O}_{\bar{x}})$) dans $V_{\bar{x}}$, celui de $\mathcal{V}'$ en $\bar{x}$ définit un $G(\mathcal{O}_{\bar{x}})$-réseau dans $V'_{\bar{x}}$. Si on identifie $V_{\bar{x}}$ avec $V'_{\bar{x}}$, la position relative de ces deux réseaux est donnée par une double classe dans $G(\mathcal{O}_{\bar{x}})\backslash G(F_{\bar{x}})/G(\mathcal{O}_{\bar{x}})$.

Comme G a une fibre réductive en $\bar{x}$, on a la décomposition de Cartan :

$$G(F_{\bar{x}}) = \bigsqcup_{\lambda} G(\mathcal{O}_{\bar{x}})\varpi_x^{\lambda} G(\mathcal{O}_{\bar{x}}),$$

où λ parcourt l'ensemble des cocaractères dominants de G, et ϖ_x est une uniformisante de X en $\bar{x}$. Chaque double-classe sous $G(\mathcal{O}_{\bar{x}})$ contient donc un unique représentant de la forme ϖ_x^{λ} où λ est un cocaractère dominant. On appelle *invariant de ϕ en $\bar{x}$* ce cocaractère dominant.

2.2. Champ des modifications

Rappelons que l'ensemble des cocaractères dominants de G est muni d'une relation d'ordre. Soient λ et λ' deux cocaractères dominants de G. On dit que $\lambda \leqslant \lambda'$ si et seulement si $\lambda' - \lambda$ est une combinaison linéaire de coefficients positifs de coracines positives de G.

Pour chaque cocaractère dominant λ de G, on considère le champ Hecke_{λ} des modifications élémentaires bornées par λ comme suit. À chaque schéma S, on associe l'ensemble des données constituées de

(i) deux G-torseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sur $X \times S$,

(ii) un morphisme $x : S \to X$, et on note $\Gamma(x)$ le graphe de x,

(iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{V}|_{X\times S-\Gamma(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}'|_{X\times S-\Gamma(x)}$$

tel que, pour chaque point géométrique $\bar{s}$ de S, la $\bar{s}$-modification $\phi_{\bar{s}}$ ait un invariant (en $x(\bar{s})$) inférieur ou égal à λ.

Soit $\mathrm{Hecke}'_{\lambda}$ le sous-champ de Hecke_{λ} en remplaçant dans la dernière condition l'inégalité $\leqslant \lambda$ par l'égalité. On peut vérifier que $\mathrm{Hecke}'_{\lambda}$ est un sous-champ ouvert de Hecke_{λ}.

Lemme 2.1. *Le morphisme*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hecke}_{\lambda} &\to X \times \mathrm{Fib}_G, \\ (\mathcal{V}, \mathcal{V}', x) &\mapsto (x, \mathcal{V}) \end{aligned}$$

est représentable et projectif. La restriction de ce morphisme à $\mathrm{Hecke}'_{\lambda}$ *est lisse.*

Démonstration. Voir [**1**]. □

Puis à chaque collection des cocaractères dominants $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de G, on va considérer le champ $\mathrm{Hecke}_{\underline{\lambda}}$ des modifications élémentaires itérées comme suit. À chaque schéma S, on associe l'ensemble des données constituées de

(i) des G-torseurs $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_n$ sur $X \times S$,

(ii) des morphismes $x_i : S \to X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et on note $\Gamma(x_i)$ les graphes des x_i,

(iii) des isomorphismes

$$\phi_i : \mathcal{V}_i|_{X \times S - \Gamma(x_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{i-1}|_{X \times S - \Gamma(x_i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

tels que, pour chaque point géométrique $\bar{s}$ de S, la $\bar{s}$-modification $\phi_{i,\bar{s}}$ ait un invariant (en $x_i(\bar{s})$) $\leqslant \lambda_i$.

On a également le sous-champ ouvert $\mathrm{Hecke}'_{\underline{\lambda}}$ en demandant que les inégalités $\leqslant \lambda_i$ dans la dernière condition soient les égalités.

Au-dessus de l'ouvert U de X^n où les sections x_i ne se rencontrent pas, les modifications itérées sont équivalentes à une seule « grosse » modification. Pour tout schéma S, pour toutes sections $x_i : S \to X$ disjointes, $\mathrm{Hecke}_{\underline{\lambda}}(S)$ consiste en des triplets $(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \phi)$ où $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sont des G-torseurs sur $X \times S$, où ϕ est une isomorphisme entre les restrictions de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ à l'ouvert complémentaire des graphes $\Gamma(x_i)$ des sections x_i.

2.3. Champ des chtoucas

Maintenant, on peut définir le champ des G-chtoucas $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}}$ à modifications multiples $\underline{\lambda}$ comme suit. À chaque schéma S, on associe l'ensemble des données constituées de

(i) des G-torseurs $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_n$ sur $X \times S$,

(ii) des morphismes $x_i : S \to X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et on note $\Gamma(x_i)$ les graphes des x_i,

(iii) des isomorphismes

$$\phi_i : \mathcal{V}_i|_{X \times S - \Gamma(x_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{i-1}|_{X \times S - \Gamma(x_i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

tels que, pour chaque point géométrique $\bar{s}$ de S, la $\bar{s}$-modification $\phi_{i,\bar{s}}$ ait un invariant (en $x_i(\bar{s})$) $\leqslant \lambda_i$,

(iv) un isomorphisme $\mathcal{V}_0^{\sigma} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{V}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_n$.

Par composition, on a un isomorphisme

$$t : \mathcal{V}_0^{\sigma}|_{X \times S - \bigcup_{i=1}^n \Gamma(x_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_0|_{X \times S - \bigcup_{i=1}^n \Gamma(x_i)}.$$

Si les graphes $\Gamma(x_i)$ sont disjoints, t détermine les ϕ_i de sorte qu'on a une description plus simple et plus symétrique du problème de module au-dessus de l'ouvert U complémentaire de la réunion des diagonales dans X^n.

Ce champ s'inscrit dans le produit cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fib}_G \arrow[d] \\ \mathrm{Hecke}_{\underline{\lambda}} \arrow[r] & \mathrm{Fib}_G \times \mathrm{Fib}_G \end{tikzcd}$$

Les deux morphismes horizontaux sont

$$(\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n; x_1, \dots, x_n; \mathcal{V}_0^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_n) \mapsto \mathcal{V}_0,$$
$$(\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n; x_1, \dots, x_n) \mapsto (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_n).$$

Les deux morphismes verticaux sont

$$(\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n; x_1, \dots, x_n; \mathcal{V}_0^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_n) \mapsto (\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n; x_1, \dots, x_n),$$
$$\mathcal{V}_0 \mapsto (\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_0^\sigma).$$

On a aussi un ouvert $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda}}$ de $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}}$ en remplaçant les inégalité $\leqslant \lambda_i$ par les égalités.

2.4. Structure de niveau principal

On appellera niveau de X un sous-schéma fermé fini I de X. On fixera un niveau I de X pour la suite de l'article.

Definition 2.2. Étant donné un niveau I de X, une structure de niveau I sur un G-chtouca

$$\tilde{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_n; x_1, \dots, x_n; \mathcal{V}_0^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_n)$$

sur un schéma S dont les points associés $x_1, x_2, \dots, x_n$ évitent I consiste en un isomorphisme

$$u : \mathcal{V}_0|_{I\times S} \xrightarrow{\sim} G(\mathcal{O}_I) \times S$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_0|_{I\times S} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "u"] & \cdots \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{V}_n|_{I\times S} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{V}_0^\sigma\ |_{I\times S} \arrow[d, "u^\sigma"] \\ G(\mathcal{O}_I) \times S \arrow[rrr, equal] & & & G(\mathcal{O}_I) \times S \end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I}$ le champ classifiant les G-chtoucas munis d'une structure de niveau I. On appelle *morphisme caractéristique* le morphisme évident

$$\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I} \to (X - I)^n.$$

Il y a une autre formulation de la notion de structure de niveau, moins concrète mais finalement plus commode. Considérons G comme le G-torseur trivial au-dessus de X

avec l'action de G sur lui-même par translation à droite et G_I la restriction de G au sous-schéma fermé I de X. Considérons le foncteur $\mathcal{G}'^I$ qui associe à tout X-schéma S le sous-groupe des automorphismes de $\mathcal{G} \times_X S$ commutant à l'action de G sur lui-même par translation à droite, qui de plus induit sur $G_I \times_X S$ l'identité. Ce foncteur est représentable par un schéma en groupes $\mathcal{G}'^I$ sur X qui est muni d'un homomorphisme vers G lequel est un isomorphisme en dehors de I. S'il n'est pas plat en général, le processus de dilatation de Raynaud [**2**] permet de le lissifier. Formellement, si on évalue le foncteur ci-dessus que sur les schémas S lisses au-dessus de X, alors il est représentable par un X-schéma en groupes lisse $\mathcal{G}^I$ [**2**, Théorème 3, p. 61]. Les foncteurs $\mathcal{G}^I$ et $\mathcal{G}'^I$ ont les mêmes points si on évalue en les schémas S lisses au-dessus de X. En particulier, on a l'homomorphisme de lissification $\mathcal{G}^I \to \mathcal{G}'^I$ qui est construit par le procédé de dilatation.

Le schéma en groupes $\mathcal{G}^I$ a des fibres connexes. Les fibres au-dessus d'un point $x \in I$ sont purement additives.

Lemme 2.3. *Pour tout X-schéma lisse S, il y a une équivalence entre la catégorie des G-torseurs $\mathcal{V}$ sur S munis d'une I-rigidification c'est-à-dire un isomorphisme de G-torseurs sur $S \times_X I$*

$$\mathcal{V} \times_X I \xrightarrow{\sim} G \times_X I \times_X S$$

et la catégorie des $\mathcal{G}^I$-torseurs sur S.

Démonstration. La première catégorie admet un objet neutre qui est le G-torseur trivial avec la I-rigidification évidente. Par construction, $\mathcal{G}^I$ est le faisceau des automorphismes de cet objet pour le petit site lisse de X. Il suffit donc de vérifier que deux G-torseurs sur S munis de I-rigidifications deviennent isomorphe après un changement de base lisse surjectif $S' \to S$. Ceci est évident, en effet, un G-torseur sur S devient trivial après un changement de base lisse surjectif. De plus, toute I-rigidification du G-torseur trivial est conjuguée à la I-rigidification évidente. □

Un chtouca $\tilde{\mathcal{V}}$ muni d'une structure de niveau I est équivalent à la donnée

(i) des $\mathcal{G}^I$-torseurs $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_n$ sur $X \times S$,

(ii) des morphismes $x_i : S \to X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dont les graphes $\Gamma(x_i)$ sont disjoints de $S \times I$,

(iii) des isomorphismes

$$\phi_i : \mathcal{V}_i|_{X \times S - \Gamma(x_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{i-1}|_{X \times S - \Gamma(x_i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

tels que, pour chaque point géométrique $\bar{s}$ de S, la $\bar{s}$-modification $\phi_{i,\bar{s}}$ ait un invariant (en $x_i(\bar{s})$) $\leqslant \lambda_i$,

(iv) un isomorphisme $\mathcal{V}_0^\sigma = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{V}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_n$.

C'est-à-dire simplement un chtouca avec schéma en groupes structurel $\mathcal{G}^I$ à la place de G.

3. Opérateurs de Hecke

3.1. Sous-groupes compacts ouverts

On notera $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, $\mathcal{O}_{\mathbb{A}} = \prod_{x\in|X|}\mathcal{O}_x$ le sous-anneau des entiers. Soit $K = \prod_{x\in|X|} K_x$ le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{A})$ défini par $K_x = G(\mathcal{O}_x)$ pour toute place x de F. Pour tout sous-schéma fermé fini T de X, on note

$$\mathbb{A}_T = \prod_{x\in T} F_x, \qquad \mathcal{O}_T = \prod_{x\in T}\mathcal{O}_x,$$
$$\mathbb{A}^T = \mathbb{A}/\mathbb{A}_T, \qquad \mathcal{O}^T = \mathcal{O}_{\mathbb{A}}/\mathcal{O}_T,$$

et

$$K_T = \prod_{x\in T} K_x, \qquad K^T = \prod_{x\notin T} K_x.$$

Pour le niveau I fixé de X qu'on supposera toujours étranger à T, on notera K_I (respectivement K_I^T) le noyau de l'homomorphisme surjectif $K \to G(\mathcal{O}_I)$ (respectivement $K^T \to G(\mathcal{O}_I)$). On a $K_I = \prod_{x\in|X|} K_{I,x}$ où $K_{I,x}$ est le sous-groupe compact ouvert de K_x défini comme le noyau de l'homomorphism $K_x \to G(\mathcal{O}_I)$.

On munit le groupe $G(\mathbb{A})$ (respectivement $G(\mathbb{A}^T)$) de la mesure de Haar $\mathrm{d}g$ (respectivement $\mathrm{d}g^T$). On normalize cette mesure de sorte que $\mathrm{d}g(K) = 1$ (respectivement $\mathrm{d}g^T(K^T) = 1$). On notera aussi $\mathrm{d}g_x$ la mesure de Haar de $G(F_x)$ de sorte que $\mathrm{d}g_x(K_x) = 1$. On obtient ainsi $\mathrm{d}g = \mathrm{d}g^T \times \prod_{x\in T}\mathrm{d}g_x$.

Pour toute place x, on notera $\mathcal{H}_{I,x}$ l'espace vectoriel des fonctions à support compact dans $G(F_x)$, invariantes à gauche et à droite par le sous-groupe compact ouvert $K_{I,x}$. Les fonctions caractéristiques ϕ_{β_x} des double-classes $\beta_x \in K_{I,x}\backslash G(F_x)/K_{I,x}$ constituent une base de $\mathcal{H}_{I,x}$. Le produit de convolution par rapport à la mesure de Haar $\mathrm{d}g_x$ définit sur cet espace vectoriel une structure d'algèbre. Pour tout sous-schéma fermé fini T' de X, on note $\mathcal{H}_{I,T'} = \bigotimes_{x\in T'}\mathcal{H}_{I,x}$. On définit $\mathcal{H}_I$ (respectivement $\mathcal{H}_I^T$) comme la limite inductive des $\mathcal{H}_{I,T'}$ sur les sous-schéma fermés finis $T' \subset X$ (respectivement $T' \subset X - T$) : si $T' \subset T''$, on a une flèche injective

$$\bigotimes_{x\in T'}\mathcal{H}_{I,x} \to \bigotimes_{x\in T''}\mathcal{H}_{I,x}$$

définie par

$$\phi \mapsto \phi \otimes \bigotimes_{x\in T''-T'} 1_{K_{I,x}}$$

où $1_{K_{I,x}}$ est la fonction caractéristique de $K_{I,x}$. L'algèbre $\mathcal{H}_I$ a une base $\bigotimes_{x\in T'}\phi_{\beta_x}$ indexée par l'ensemble des couples $(T', (\beta_x)_{x\in T'})$ où T' est un sous-schéma fermé de X et où $\beta_x \in K_{I,x}\backslash G(F_x)/K_{I,x}$ est une double-classe, quotienté par la relation d'équivalence évidente.

3.2. Correspondances

Soit T' un sous-schéma fermé de X ayant éventuellement une intersection avec le niveau I. Pour chaque place $x \in T'$, on se donne une double classe $\beta_x \in K_{I,x}\backslash G(F_x)/K_{I,x}$. L'opérateur de Hecke $\bigotimes_{x\in T'}\beta_x$ agit sur $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I} \otimes_{(X-I)^n} (X-I-T')^n$ par correspondance qu'on va définir dans ce paragraphe.

Soit $x \in T'$ un point fermé. Soit Y un épaississement de x dans X. Un chtouca $\tilde{\mathcal{V}} \in \mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I}(S)$ induit par restriction à Y un $\mathcal{G}^I$-torseur $\mathcal{V}_Y$ au-dessus de $Y \times S$ muni d'un isomorphisme $\mathcal{V}_Y^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_Y$. Puisque $\mathcal{G}^I$ a des fibres connexes, d'après [**9**], ceci revient à se donner un S-point du classifiant du groupe fini $\mathcal{G}^I(\mathcal{O}_Y)$ autrement dit un $\mathcal{G}^I(\mathcal{O}_Y)$-torseur $\mathcal{V}_Y^\natural$ au-dessus de S. Quand Y parcourt l'ensemble de tous les épaississements de x dans X, on obtient un $K_{I,x}$-torseur $\mathcal{V}_x^\natural$ au-dessus de S où $K_{I,x} = \mathcal{G}^I(\mathcal{O}_x)$.

Une correspondance de type $(T', (\beta_x)_{x\in T'})$ entre deux chtoucas $\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{V}}' \in \mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I}(S)$ de même caractéristique $x_1, \dots, x_n$ consiste en la donnée d'un isomorphisme

$$t' : \tilde{\mathcal{V}}|_{(X-T')\times S} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{V}}'|_{(X-T')\times S}$$

entre les restrictions de $\tilde{\mathcal{V}}$ et $\tilde{\mathcal{V}}'$ à l'ouvert complémentaire de T', vérifiant la propriété suivante. Pour tous $x \in T'$, soient $\mathcal{V}_x^\natural$ et $\mathcal{V}_x'^\natural$ les $K_{I,x}$-torseurs sur S associés aux chtoucas $\tilde{\mathcal{V}}$ et $\tilde{\mathcal{V}}'$. La flèche t' induit un isomorphisme entre les $\mathcal{G}^I(F_x)$-torseurs induits par $\mathcal{V}_x^\natural$ et $\mathcal{V}_x'^\natural$. Cet isomorphisme induit donc une fonction localement constante de S dans l'ensemble des double-classes $K_{I,x}\backslash\mathcal{G}^I(F_x)/K_{I,x}$. On demande que cette fonction soit constante et de valeur β_x. L'énoncé suivant suit immédiatement.

Lemme 3.1. *Pour tout* $(T', (\beta_x)_{x\in T'})$ *comme ci-dessus, nous considérons le foncteur* $\Phi(T', (\beta_x)_{x\in T'})$ *au-dessus de*

$$\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I} \times_{(X-I)^n} (X-I-T')^n$$

qui associe à tout G*-chtouca* $\tilde{\mathcal{V}}$ *avec structure de niveau* I *et de caractéristique étrangère à* T' *la catégorie des couples constitués d'un* G*-chtouca* $\tilde{\mathcal{V}}'$ *avec structure de niveau* I*, de même caractéristique que* $\tilde{\mathcal{V}}$ *et d'une correspondance entre* $\tilde{\mathcal{V}}$ *et* $\tilde{\mathcal{V}}'$ *de type* $(T', (\beta_x)_{x\in T'})$*. Le foncteur* $\Phi(T', (\beta_x)_{x\in T'})$ *est représentable par un morphisme fini et étale sur* $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I} \times_{(X-I)^n} (X-I-T')^n$.

4. Problème de comptage

4.1. Soit $s \geqslant 1$ un entier naturel, $x_1, \dots, x_n \in X(\mathbb{F}_{q^s})$ distincts points de $X - I$ à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^s}$. On fixe également un fermé fini T' disjoints de $\{x_1, \dots, x_n\}$ et pour tout $x \in T'$, on fixe une double-classe $\beta_x \in K_{I,x}\backslash G(F_x)/K_{I,x}$. Soit $\Phi(T', (\beta_x)_{x\in T'})$ la correspondance de Hecke associée. On cherche à exprimer le cardinal du groupoïde des points fixes $\sigma^s \circ \Phi(T', (\beta_x)_{x\in T'})$ dans $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I}(x_1, \dots, x_n)$ par une formule susceptible d'être comparée avec le côté géométrique de la formule des traces d'Arthur–Selberg. Il suffit en fait de compter les points dans l'ouvert $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda},I}(x_1, \dots, x_n)$ (cf. §§ 2.3 et 2.4) stable par l'endomorphisme de Frobenius et par l'opérateur de Hecke.

Soit $\bar{T} = \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ où $\bar{x}_i$ est le point géométrique au-dessus de x_i. Soit T le plus petit fermé de X contenant les points géométriques $\bar{x}_i$. Soit $\mathcal{C}^I(T, T', s)$ la catégorie des triplets $(\mathcal{V}, t, t')$ constitués de

(i) $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{G}^I$-torseur sur la courbe $\bar{X}$,

(ii) une $\bar{T}$-modification $t : \mathcal{V}^\sigma|_{\bar{X}-\bar{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}\,|_{\bar{X}-\bar{T}}$,

(iii) une $\bar{T}'$-modification $t' : \mathcal{V}^{\sigma^s}|_{\bar{X}-\bar{T}'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}|_{\bar{X}-\bar{T}'}$,

tels que t et t' commutent :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}^{\sigma^{s+1}}|_{\bar{X}-\bar{T}\cup\bar{T}'} & \xrightarrow{\sigma^s(t)} & \mathcal{V}^{\sigma^s}|_{\bar{X}-\bar{T}\cup\bar{T}'} \\ {\scriptstyle\sigma(t')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t'} \\ \mathcal{V}^{\sigma}\,|_{\bar{X}-\bar{T}\cup\bar{T}'} & \xrightarrow{t} & \mathcal{V}|_{\bar{X}-\bar{T}\cup\bar{T}'} \end{array}$$

La notion d'isomorphisme entre des tels objets est évidente.

On introduit aussi des sous-catégories $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$ dont les objets sont des triplets $(\mathcal{V}, t, t')$ qui vérifient en plus les conditions suivantes :

(iv) l'invariant $\mathrm{inv}_{\bar{x}_i}(t)$ vaut λ_i,

(v) la correspondance t' entre le chtouca $(\mathcal{V}, t)$ et le chtouca $\sigma^s(\mathcal{V}, t)$ est de type β_x en tout point fermé $x \in T'$ (cf. § 3.2).

Dans un triplet $(\mathcal{V}, t, t') \in \mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$, la paire $\tilde{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}, t)$ définit un G-chtouca avec une structure de niveau I et t' définit une correspondance entre $\tilde{\mathcal{V}}^{\sigma^s}$ et $\tilde{\mathcal{V}}$ de type $(T', (\beta_x)_{x\in T'})$. Il est clair que la catégorie des points fixes de $\sigma^s \circ \Phi(T', (\beta_x)_{x\in T'})$ dans $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda},I}(x_1, \ldots, x_n)$ est la catégorie $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$.

En absence de structure de niveaux, on notera

$$\mathcal{C}(T, T', s) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$$

les catégories obtenues. Il y a les foncteurs d'oubli de structures de niveaux

$$\mathcal{C}^I(T, T', s) \to \mathcal{C}(T, T', s) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T, T', s) \to \mathcal{C}_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T, T', s).$$

4.2. Le nombre

$$\#\mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T, T', s) = \sum \frac{1}{\#\mathrm{Isom}(\mathcal{V}, t, t')}$$

où la somme parcourt un ensemble de représentants de classes d'isomorphismes d'objets $(\mathcal{V}, t, t')$ de $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$ est en général infini car le champ des chtoucas n'est pas de type fini.

On va modifier le problème de comptage comme suit. Notons Z le centre de G. On fixe un sous-groupe discret $J \subset Z(\mathbb{A}^{T\cup I}) \subset Z(\mathbb{A})$ qui est cocompact dans $Z(\mathbb{A})/Z(F)$.

Le groupe J agit sur $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda}}(x_1,\dots,x_n)$ par correspondance de Hecke. On va considérer le quotient du champ $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda}}(x_1,\dots,x_n)$ par l'action de J. Ceci revient à ajouter formellement un isomorphisme entre un objet $\tilde{\mathcal{V}}$ et son transformé par un élément $j \in J$. En appliquant le même procédé aux catégories $\mathcal{C}^I(T,T',s)$ et $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta'_T}(T,T',s)$, on obtient les catégories $\mathcal{C}^I(T,T',s)_J$ et $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta'_T}(T,T',s)_J$

On définit le nombre

$$\#\mathcal{C}^{I,\mathrm{reg,ell}}_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T,T',s)_J = \sum \frac{1}{\#\mathrm{Isom}(\mathcal{V},t,t')}$$

où la somme parcourt un ensemble de représentants de classes d'isomorphismes d'objets $(\mathcal{V},t,t')$ dits *réguliers elliptiques* de $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T,T',s)_J$, voir la définition 6.1.

Le résultat principal de cet article est que cette somme est finie et qu'on peut l'exprimer en termes d'intégrales orbitales, et d'intégrales orbitales tordues. C'est une variante du problème de comptage des points des variétés de Shimura qui a été résolu par Kottwitz [**8**].

5. La fibre générique de $(\mathcal{V},t,t')$

5.1. Catégorie $C(T,T',s)$

On considère la catégorie $C(T,T',s)$ des triplets (V,τ,τ') dont

(i) V est un G-torseur sur $F\otimes_{\mathbb{F}_q} k$,

(ii) $\tau : V^\sigma \to V$ est une application σ-linéaire,

(iii) $\tau' : V^{\sigma^s} \to V$ est une application σ^s-linéaire,

qui vérifient les propriétés suivantes :

(a) τ et τ' commutent,

(b) pour toute place $x \notin T$, (V_x,τ_x) est isomorphe à

$$(G(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k), \mathrm{id}\,\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\sigma),$$

(c) pour toute place $x \in T$, (V_x,τ'_x) est isomorphe à

$$(G(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^s}} k), \mathrm{id}\,\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^s}}\sigma^s).$$

5.2. La fibre générique

On va définir un foncteur de $\mathcal{C}(T,T',s)$ dans $C(T,T',s)$. On associe ainsi à un triplet $(\mathcal{V},t,t')$ de $\mathcal{C}(T,T',s)$ un objet (V,τ,τ') dans $C(T,T',s)$ qu'on appellera sa fibre générique. La construction s'étend sans difficulté aux triplets $(\mathcal{V},t,t')$ de $\mathcal{C}^I(T,T',s)$ à l'aide du foncteur d'oubli de structure de niveau.

On note V la fibre générique de $\mathcal{V}$ qui est alors un G-torseur sur $F\otimes_{\mathbb{F}_q} k$. Les modifications t et t' induisent les isomorphismes $\tau : V^\sigma \to V$, et $\tau' : V^{\sigma^s} \to V$. Montrons que ce triplet (V,τ,τ') est dans $C(T,T',s)$.

Comme t et t' commutent sur l'ouvert $\bar{X} - \bar{T} \cup \overline{T'}$, les applications τ et τ' commutent.

Pour chaque place $x \in X$, on note V_x le complété de V en x, $\tau_x : V_x^\sigma \to V_x$ l'application σ-linéaire induite de τ et $\tau'_x : V_x^{\sigma^s} \to V_x$ l'application σ^s-linéaire induite de τ'.

Puisque t est un isomorphisme en dehors de T, en chaque place $x \notin T$, le $G(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$-torseur V_x est la fibre générique d'un $G(\mathcal{O}_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$-torseur $\mathcal{V}_x$ et celui-ci est muni d'un isomorphisme $\tau_x : \mathcal{V}_x^\sigma \to \mathcal{V}_x$. Puisque G est de fibres connexes, $(\mathcal{V}_x, \tau_x)$ est isomorphe au torseur trivial muni de son Frobenius d'après le théorème de Lang. On en déduit que (V_x, τ_x) est isomorphe à

$$(G(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k), \mathrm{id} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \sigma).$$

Puisque t' est un isomorphisme en dehors de T', en chaque place $x \in T$, en particulier pour $x \notin T'$, le même argument montre que (V_x, τ'_x) est isomorphe à

$$(G(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^s}} k), \mathrm{id} \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^s}} \sigma^s).$$

L'action de J par opérateurs de Hecke ne change pas la fibre générique. On obtient du même coup les foncteurs $\mathcal{C}(T, T', s)_J \to C(T, T', s)$ et $\mathcal{C}^I(T, T', s)_J \to C(T, T', s)$.

6. L'invariant $\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$

6.1. Triplets de Kottwitz

À chaque triplet $(V, \tau, \tau') \in C(T, T', s)$, on va lui associer un nouveau triplet de Kottwitz $(\gamma_0; (\gamma_x)_{x \notin T}, (\delta_x)_{x \in T})$ où

(a) γ_0 est une classe de conjugaison stable de $G(F)$;

(b) pour toute place $x \notin T$, γ_x est une classe de conjugaison de $G(F_x)$ dont la classe stable est celle de γ_0 ; de plus, pour presque toute place $x \notin T$, γ_x est conjuguée à γ_0 ;

(c) pour toute place $x \in T$, δ_x est une classe de σ-conjugaison de $G(F_x \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s})$ dont la norme est stablement conjuguée à γ_0.

Il s'agit des même triplets que ceux de Kottwitz dans le comptage des points de certaines variétés de Shimura.

Si n est un entier positif, on notera $\tau^n = \tau \circ \sigma(\tau) \circ \cdots \circ \sigma^{n-1}(\tau) : V^{\sigma^n} \to V$. Avec cette notation, on pose $\gamma = \tau^s \tau'^{-1}$. Alors γ est un automorphisme de V. Le corps $F \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ étant de dimension cohomologique 1, et G étant un groupe réductif connexe, le G-torseur V est nécessairement trivial (cf. [**15**, Remarque 1, p. 140]). Un automorphisme de ce torseur définit une classe de conjugaison de $G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$. Comme τ et τ' commutent, on en déduit

$$\sigma(\gamma) = \tau^{-1} \gamma \tau,$$

autrement dit la classe de conjugaison de γ est σ-invariante. La classe de $G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$-conjugaison de γ est stable par σ, donc définie sur F. Comme on a supposé que G est quasi-déployé, et que son groupe dérivé simplement connexe, cette classe de $G(F\otimes_{\mathbb{F}_q}k)$-conjugaison contient un F-point. Autrement dit l'automorphisme γ de V définit bien une classe de conjugaison stable de $G(F)$ que nous notons γ_0.

En chaque place $x\notin T$, (V_x,τ_x) est isomorphe à $(G(F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}k),\mathrm{id}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\sigma)$. Choisissons un tel isomorphisme. Comme τ et τ' commutent, τ_x et τ'_x commutent aussi. Par conséquent, l'application σ^s-linéaire τ'_x est nécéssairement de la forme $\gamma_x^{-1}\otimes\sigma^s$ où γ_x est un automorphisme de $G(F_x)$ dont la classe stable est celle de γ_0. Sans le choix de l'isomorphisme, la classe de $G(F_x)$-conjugaison de γ_x est bien définie.

En chaque place $x\in T$, en particulier $x\notin T'$, le couple (V_x,τ'_x) est isomorphe à $(G(F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^s}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^s}}k),\mathrm{id}\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^s}}\sigma^s)$. Choisissons un tel isomorphisme. Comme τ et τ' commutent, τ_x et τ'_x commutent aussi. Par conséquent, l'application σ-linéaire τ_x définit une classe de σ-conjugaison δ_x de $G(F_x\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^s})$ dont la norme est stablement conjuguée à γ_0. Sans le choix de l'isomorphisme, la classe de σ-conjugaison de δ_x dans $G(F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^s})$ est bien définie.

Definition 6.1. Soient $(\mathcal{V},t,t')$ un triplet dans $\mathcal{C}(T,T',s)$ (respectivement (V,τ,τ') un triplet dans $C(T,T',s)$) et $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ le triplet de Kottwitz associé.

On dit que

(a) $(\mathcal{V},t,t')$ (respectivement (V,τ,τ')) est *semi-simple* si l'élément γ_0 de $G(F)$ est semi-simple,

(b) $(\mathcal{V},t,t')$ (respectivement (V,τ,τ')) est *régulier elliptique* si γ_0 est semi-simple et régulier elliptique.

6.2. L'invariant $\mathrm{inv}(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$

On suppose que γ_0 est semi-simple. Donc le centralisateur G_{γ_0} est un groupe réductif. À partir du triplet $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ comme dans § 5.1, on va définir un invariant $\mathrm{inv}(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)\in(Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma})^*$ en suivant [**8**] notamment pour les places $x\in T$.

En chaque place $x\notin T$, comme γ_x est stablement conjugué à γ_0, il existe un élément $g\in G(\bar{F}_x)$ tel que $\gamma_x=g\gamma_0g^{-1}$. En vertu du théorème de Steinberg qui affirme $\mathrm{H}^1(\bar{F}_x/F_x^{\mathrm{un}},G_{\gamma_0}(\bar{F}_x))=1$ (cf. [**16**] ou [**15**, § 2.3]), g peut être choisi de telle sorte que $g\in G(F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}k)$. Donc

$$g\gamma_0g^{-1}=\gamma_x=\sigma(\gamma_x)=\sigma(g)\gamma_0\sigma(g)^{-1}.$$

D'où $g^{-1}\sigma(g)$ est un centralisateur de γ_0 dans $G(\bar{F}_x)$ et définit un élément de $B(G_{\gamma_0,x})$. D'après Kottwitz, on a une application

$$B(G_{\gamma_0,x})\to(Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x})^*.$$

Par conséquent, $g^{-1}\sigma(g)$ définit un caractère $\mathrm{inv}_x(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ de $Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x}$. On note encore

$$\mathrm{inv}_x(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x):Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x}\to\mathbb{C}^*$$

sa restriction à $Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma}$.

D'après [**6**, Proposition 7.1], pour presque toute place $x\notin T$, γ_x et γ_0 sont conjuguées de sorte que l'invariant $\mathrm{inv}_x(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ s'annule.

Remarque 6.2. Le plongement $\Gamma_x \hookrightarrow \Gamma$ dépend du choix du plongement $\bar{F} \hookrightarrow \bar{F}_x$. Par contre, la restriction

$$\mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x) : Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma} \to \mathbb{C}^*$$

est indépendente de ce choix.

En chaque place $x \in T$, comme la classe de σ-conjugaison δ_x dans $G(F_x \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s})$ a pour norme la classe stable γ_0, il existe un élément $g \in G(\bar{F}_x)$ tel que $N\delta_x = g\gamma_0 g^{-1}$. Grâce au théorème de Steinberg [**15**, § 2.3], g peut être choisi dans $G(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$. Donc $g^{-1}\delta_x\sigma(g)$ appartient à $G_{\gamma_0}(\bar{F}_x)$ et définit un élément de $B(G_{\gamma_0,x})$. D'après Kottwitz, on a une application

$$B(G_{\gamma_0,x}) \to (Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x})^*.$$

Par conséquent, $g^{-1}\delta_x\sigma(g)$ définit un caractère $\mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ de $Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x}$. On note encore

$$\mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x) : Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x} \to \mathbb{C}^*$$

sa restriction à $Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma}$.

L'invariant $\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ est défini comme

$$\sum_{x \in X} \mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x).$$

Dans cette somme, les termes sont presque tous nuls. C'est un élément de $(Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma})^*$.

6.3. Une autre construction de l'invariant $\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$

On va maintenant proposer une autre façon de construire l'invariant $\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ dans le cas où le triplet $(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ est défini à partir d'un certain triplet $(\mathcal{V}, t, t') \in \mathcal{C}(T, T', s)$.

On considère la fibre générique (V, τ, τ') de $(\mathcal{V}, t, t')$. Rappelons que si on définit $\gamma = \tau^s \tau'^{-1}$, la classe stable de γ dans $G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ contient un élément γ_0 dans $G(F)$. Donc on a un isomorphisme entre le couple (V, γ) et $(G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k), \gamma_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathrm{id})$. Cet isomorphisme transforme τ en une application σ-linéaire

$$\tau_0 : V_0^{\sigma} \to V_0$$

où $V_0 = G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ est le G-torseur trivial. Cette application commute avec γ_0, donc elle définit une application σ-linéaire sur $G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$.

On peut définir un invariant $\mathrm{inv}(\tau_0) \in (Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma})^*$ associé à τ_0 qui s'écrit comme produit des invariants locaux. En chaque place x de X, τ_0 induit une application σ-linéaire $\tau_{0,x}$ de $G_{\gamma_0}(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$ qui à son tour, définit un élément de $B(G_{\gamma_0}(F_x))$. En utilisant l'application

$$B(G_{\gamma_0,x}) \to (Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x})^*,$$

on obtient un caractère

$$Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x} \to \mathbb{C}^*.$$

La restriction à $Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma}$ définit l'invariant local $\mathrm{inv}_x(\tau_0)$. Enfin, l'invariant $\mathrm{inv}(\tau_0)$ est définit comme le produit sur toutes les places $x \in X$ des invariants locaux :

$$\mathrm{inv}(\tau_0) = \sum_{x \in X} \mathrm{inv}_x(\tau_0) : Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma} \to \mathbb{C}^*.$$

Il est bien défini car pour presque toute place $x \notin T$, $\tau_{0,x} \in G_{\gamma_0}(\mathcal{O}_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$, ainsi en vertu du théorème de Greenberg [**4**], cet élément est σ-conjugué à l'identité, autrement dit $\mathrm{inv}_x(\tau_0)$ est trivial.

On va montrer que ces deux constructions sont équivalentes.

Lemme 6.3. *Les deux invariants* $\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ *et* $\mathrm{inv}(\tau_0)$ *sont égaux.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que les facteurs locaux définis dans $B(G_{\gamma_0}(F_x))$ sont les mêmes. On peut supposer que $\gamma_0 = \tau^s \tau'^{-1}$, donc $\tau_0 = \tau$ peut se voir comme un élément dans $G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$.

Pour une place $x \notin T$, on sait qu'il existe un élément $g \in G(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$ tel que $\tau = g^{-1}\sigma(g)$. Puisque τ' commute avec τ, on a

$$\tau' \sigma^s(g^{-1}) \sigma^{s+1}(g) = g^{-1}\sigma(g)\sigma(\tau')$$

ou

$$g\tau'\sigma^s(g^{-1}) = \sigma(g\tau'\sigma^s(g^{-1})).$$

Donc, $g\tau'\sigma^s(g^{-1})$ est dans $G(F_x)$. Cet élément est exactement γ_x^{-1}. Un simple calcul nous donne

$$\gamma_x = g\gamma_0 g^{-1}.$$

Donc les facteurs locaux en la place x sont égaux.

Pour une place $x \in T$, on en déduit que $x \notin T'$. Il existe un élément $g \in G(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$ tel que $\tau' = g^{-1}\sigma^s(g)$. Puisque τ' commute avec τ, on a

$$g^{-1}\sigma^s(g)\sigma^s(\tau) = \tau\sigma(g^{-1})\sigma^{s+1}(g)$$

ou

$$g\tau\sigma(g^{-1}) = \sigma^s(g\tau\sigma(g^{-1})).$$

Donc, $g\tau\sigma(g^{-1})$ est dans $G(F_x \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s})$. Cet élément est exactement δ_x. Un simple calcul nous donne

$$N\delta_x = g\gamma_0 g^{-1}.$$

Donc les facteurs locaux en la place x sont égaux. La preuve est terminée. □

7. Nullité de l'invariant $\mathbf{inv}(\boldsymbol{\gamma_0};\boldsymbol{\gamma_x},\boldsymbol{\delta_x})$

Dans cette section, on montre la proposition suivante.

Proposition 7.1. *Soit* $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ *le triplet associé à un triplet* (V,τ,τ'). *Supposons que* γ_0 *est semi-simple. Alors, on a*

$$\mathrm{inv}(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)=\mathrm{inv}(\tau_0)=0.$$

En effet, on démontre une assertion plus forte. Étant donnés un groupe réductif H connexe sur F et un élément $t\in H(F\otimes_{\mathbb{F}_q}k)$, on peut définir l'invariant $\mathrm{inv}(t):Z(\hat{H})^{\Gamma}\to\mathbb{C}^*$ de la même manière que celle de $\mathrm{inv}(\tau_0)$. On montre la proposition suivante.

Proposition 7.2. *On a toujours* $\mathrm{inv}(t)=0$.

La suite de cette section est consacrée à démontrer cette proposition.

7.1. On regarde d'abord le cas le plus simple où $G=\mathbb{G}_m$. Soit $t\in\mathbb{G}_m(F\otimes_{\mathbb{F}_q}k)$. Pour chaque place $x\in X$, on lui considère comme un élément dans $\mathbb{G}_m(F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}k)$. Supposons que le corps résiduel $\kappa(x)$ de F_x est de cardinal q^n. On choisit un plongement sur $\mathbb{F}_q$ de $\kappa(x)$ dans k :

$$i_0:\kappa(x)\hookrightarrow k.$$

On obtient aussi les plongements

$$i_j=\sigma^j\circ i_0:\kappa(x)\hookrightarrow k,\quad 0\leqslant i<n.$$

Alors

$$F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}k=\prod_{0\leqslant j<n}F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^n},i_j}k$$

est un scindage de $F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}k$ dont chaque facteur est un corps. De plus, on dispose des isomorphismes :

$$\sigma^j:F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^n},i_0}k\to F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^n},i_j}k.$$

Soient

$$\begin{aligned}g&=(g_0,\sigma(g_1),\ldots,\sigma^{n-1}(g_{n-1})),\\ h&=(h_0,\sigma(h_1),\ldots,\sigma^{n-1}(h_{n-1}))\end{aligned}$$

deux éléments de $F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}k$. Alors,

$$h^{-1}g\sigma(h)=(h_0^{-1}g_0\sigma^n(h_{n-1}),\sigma(h_1^{-1}g_1h_0),\ldots,\sigma^{n-1}(h_{n-1}^{-1}g_{n-1}h_{n-2})).$$

On voit bien que la classe de σ-conjugaison de g dans $\mathbb{G}_m(F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}k)$ induit une σ^n-conjugaison de $g_{n-1}g_{n-2}\cdots g_0$ dans $\mathbb{G}_m(F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^n},i_0}k)$.

Cette application établit une bijection entre l'ensemble des classes de σ-conjugaison de $\mathbb{G}_m(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$ et l'ensemble des classes de σ^n-conjugaison de $\mathbb{G}_m(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^n},i_0} k)$. D'après Kottwitz, pour chaque classe de σ^n-conjugaison de $\mathbb{G}_m(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^n},i_0} k)$, l'application val_x induit un isomorphisme du dernier ensemble avec $\mathbb{Z}$. Par conséquent, il y a une bijection entre l'ensemble des classes de σ-conjugaison de $\mathbb{G}_m(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$ et $\mathbb{Z}$ qui à g associe $\mathrm{val}_x(g)$.

On suppose que t est définie sur une extension finie $E = F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^m}$ de F. On considère t comme un élément dans $\mathbb{G}_m(F_x \otimes_F E) = \prod_{y|x} \mathbb{G}_m(E_y)$. Alors,

$$\mathrm{val}_x(t) = \sum_{y|x} \mathrm{val}_y(t).$$

La nullité de l'invariant $\mathrm{inv}(t)$ résulte de l'égalité

$$\sum_{x\in X} \sum_{y|x} \mathrm{val}_y(t) = \sum_{y\in E} \mathrm{val}_y(t) = 0.$$

7.2. Supposons maintenant que G est un tore induit. Autrement dit, $G = \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m$ où E/F est une extension finie. Par définition de la restriction scalaire à la Weil, l'élément $t \in G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ correspond à un élément $t' \in \mathbb{G}_m(E \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$. En chaque place x de F, on a l'isomorphisme de Shapiro

$$B_x(G/F) \xrightarrow{\sim} B_x(\mathbb{G}_m/E)$$

et ce dernier est en bijection avec $\mathbb{Z}$. Ainsi, la classe de t dans $B_x(G/F)$ correspond au nombre

$$\sum_{y|x} \mathrm{val}_y(t').$$

La nullité de l'invariant inv(t) résulte de cette égalité.

7.3. Avant de continuer, on rappelle le lemme évident suivant.

Lemme 7.3. *Soit $G \to H$ un morphisme surjectif entre deux groupes réductifs connexes sur F. Soit $g \in G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ et on note h son image dans $H(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$. Alors,* $\mathrm{inv}(h)$ *est l'image de* $\mathrm{inv}(g)$ *par l'application naturelle* $(Z(\hat{G})^\Gamma)^* \to (Z(\hat{H})^\Gamma)^*$.

En particulier, si $\mathrm{inv}(g)$ *s'annule, alors* $\mathrm{inv}(h)$ *s'annule aussi.*

7.4. Passons maintenant au cas où G est un tore quelconque sur F. Il existe toujours une suite exacte courte

$$0 \to U \to T \to G \to 0$$

de tores où T est un produit des tores induits et U est un tore sur F. En particulier, on a $H^1(U, F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) = 0$, donc l'application

$$T(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \to G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$$

est surjectif. On choisit un relèvement $t' \in T(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ de $t \in G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$. On a montré que $\mathrm{inv}(t')$ s'annule, donc $\mathrm{inv}(t)$ s'annule aussi.

7.5. Ensuite, supposons que G_{der} est simplement connexe. Alors, $D = G/G_{\mathrm{der}}$ est un tore sur F et

$$Z(\hat{G}) = Z(\hat{D}).$$

On en déduit que si t' est l'image de t dans $D(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$, alors $\mathrm{inv}(t) = \mathrm{inv}(t')$. En particulier, $\mathrm{inv}(t) = 0$.

7.6. Finalement, pour un groupe réductif connexe quelconque. On peut toujours construire une extension centrale

$$0 \to U \to H \to G \to 0$$

où U est un tore sur F et H_{der} est simplement connexe. Puisque U est un tore, on a $H^1(U, F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) = 0$. Donc, on peut relever $t \in G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ en un élément $t' \in H(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$. Puisque H_{der} est simplement connexe, $\mathrm{inv}(t') = 0$, donc $\mathrm{inv}(t) = 0$.

La preuve est terminée.

Désormais, on suppose toujours que γ_0 est régulier et elliptique. En particulier, le centralisateur G_{γ_0} de γ_0 dans G est un tore défini sur F.

8. Groupe des automorphismes

Soient (V, τ, τ') un triplet régulier elliptique de $C(T, T', s)$ et $(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ le triplet de Kottwitz associé. On va montrer le lemme suivant.

Lemme 8.1. *Le groupe des automorphismes de* (V, τ, τ') *est* $G_{\gamma_0}(F)$.

Démonstration. On peut supposer que $V = G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ et $\tau^s \tau' = \gamma_0$. Dans ce cas, le groupe des automorphismes est le sous-groupe

$$\mathrm{Aut}(V, \tau, \tau') = \{g \in G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \mid g\tau = \tau\sigma(g) \text{ et } g\gamma_0 = \gamma_0 g\}.$$

Soit g un élément dans $\mathrm{Aut}(V, \tau, \tau')$. Puisque g et τ commutent avec γ_0, on en déduit que $\tau, g \in G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$. Ce dernier est un tore, donc τ et g commutent. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aut}(V, \tau, \tau') &= \{g \in G(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \mid g\tau = \tau\sigma(g) \text{ et } g\gamma_0 = \gamma_0 g\} \\
&= \{g \in G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \mid \tau g = \tau\sigma(g)\} \\
&= \{g \in G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \mid g = \sigma(g)\} \\
&= G_{\gamma_0}(F).
\end{aligned}$$

La preuve est terminée. □

Remarque 8.2. Pour un élément semisimple γ_0, les arguments ci-dessus montrent que le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(V, \tau, \tau')$ est l'ensemble $J(F)$ où J est une forme intérieure de G_{γ_0}. Dans le cas précédent où γ_0 est régulier, G_{γ_0} est commutatif, et donc J est isomorphe à G_{γ_0} sur F.

9. Comptage des réseaux

Dans cette section, on compte le nombre de classes d'isomorphismes ayant une fibre générique fixée.

Proposition 9.1. *On fixe un triplet régulier elliptique (V,τ,τ') et on note $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ le triplet qui lui est associé. Alors, le nombre des classes d'isomorphismes*

$$\sum_{(\mathcal{V},t,t')}\frac{1}{\#\mathrm{Isom}(\mathcal{V},t,t')}$$

où la somme parcourt un ensemble de représentants de classes d'isomorphismes d'objets $(\mathcal{V},t,t')$ de $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T,T',s)_J$ dont la fibre générique est isomorphe à (V,τ,τ') est fini et égale à

$$\mathrm{d}g(K_I^T)\cdot\mathrm{vol}(JG_{\gamma_0}(F)\backslash G_{\gamma_0}(\mathbb{A}))\prod_{x\notin T}\mathbf{0}_{\gamma_x}(\phi_{\beta_x})\prod_{x\in T}\boldsymbol{TO}_{\delta_x}(\phi_{\lambda_x})$$

où

- *pour chaque place $x\in T$, ϕ_{λ_x} est la fonction sphérique*

$$\phi_{\lambda_x}=\bigotimes_{\substack{y\in T\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^s}\\ y|x}}\phi_{\lambda_y}\in\bigotimes_{\substack{y\in T\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^s}\\ y|x}}\mathcal{H}_y,$$

- *pour chaque place $x\in T'$, ϕ_{β_x} est la fonction caractéristique de la double classe β_x,*
- *pour chaque place $x\notin T\cup T'$, ϕ_{β_x} est la fonction caractéristique de la double classe triviale de $G(\mathcal{O}_x)\backslash G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$.*

Démonstration. Se donner un objet $(\mathcal{V},t,t')$ de $\mathcal{C}_{I,\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T,T',s)$ dont la fibre générique est (V,τ,τ') revient à se donner en toutes les places $x\in X$, un $G(\mathcal{O}_x)$-réseau $\mathcal{V}_x$ de V_x, plus une structure de niveau I tels que

- en une place $x\notin T$, le réseau $\mathcal{V}_x$ est fixe par τ,
- en une place $x\notin T'$, le réseau $\mathcal{V}_x$ est fixe par τ',
- en une place $x\in T$, la position relative entre $\mathcal{V}_x$ et $\tau(\mathcal{V}_x)$ est donnée par λ_x,
- en une place $x\in T'$, les descentes de k à $\mathbb{F}_q$ de $\mathcal{V}_x$ et $\tau'(\mathcal{V}_x)$ munis d'une structure de niveau en I, sont en position relative β_x.

On doit compter le nombre de ces réseaux modulo l'action du groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(V,\tau,\tau')=G_{\gamma_0}(F)$ et l'action du groupe J. Ce nombre est égal à l'expression ci-dessus, qui résulte même de la définition des intégraux. Pour terminer, on remarque que cette somme est finie car on a supposé que γ_0 est elliptique. □

10. Existence des classes d'isogénie ayant un triplet $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ donné

On a vu que si $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ est le triplet associé à un triplet semi-simple (V,τ,τ'), alors l'invariant $\mathrm{inv}(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ s'annule. Le but de cette section est de démontrer l'assertion réciproque dans le cas où γ_0 est régulier.

Proposition 10.1. *Supposons que γ_0 est régulier. Soit $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ est un triplet de Kottwitz dont l'invariant $\mathrm{inv}(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ s'annule. Alors, il existe un triplet $(V,\tau,\tau')\in C(T,T',s)$ tel que le triplet de Kottwitz associé soit $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$.*

10.1. On considère $\mathcal{T}$ le modèle de Néron connexe du tore $\mathbb{T}=G_{\gamma_0}$ défini sur le point générique de X. C'est un schéma en groupes commutatifs lisse à fibres connexes de fibre générique G_{γ_0} et est universel pour ces propriétés.

Proposition 10.2. *Il est équivalent de se donner un $\mathcal{T}$-torseur sur $X\times_{\mathbb{F}_q}k$ muni d'un trivialisation au point générique ou de se donner tout point géométrique $\bar{x}$ de X, un caractère $\hat{\mathbb{T}}^{I_x}\to\mathbb{C}^\times$ qui sont presque tous nuls.*

Démonstration. Un $\mathcal{T}$-torseur sur $X\times_{\mathbb{F}_q}k$ muni d'un trivialisation au point générique consiste en la donnée en tout point géométrique $\bar{x}$ de X, un élément de $t_x\in\mathbb{T}(F_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}k)/\mathcal{T}(\mathcal{O}_x\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}k)$ qui sont presque partout triviaux. Il suffit d'évoquer [**14**], ce groupe est isomorphe au groupe des coinvariants $X_*(\mathbb{T})_{I_x}$ et donc au groupe des caractères $\hat{\mathbb{T}}^{I_x}\to\mathbb{C}^\times$. □

Si pour toute place $x\in|X|$, on se donne l'invariant $\mathrm{inv}_x(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)\in X_*(\mathbb{T})_{\Gamma_x}$, on pourra relever cet invariant en un élément $\alpha_x\in X_*(\mathbb{T})_{I_x}$. En mettant ensemble ces choix, on aura un $\mathcal{T}$-torseur $\mathcal{T}'$, muni d'un trivialisation en fibre générique.

10.2. Ensuite, on rappelle le calcul du groupe des composantes connexes du champ des $\mathcal{T}$-torseurs sur $X\times_{\mathbb{F}_q}k$, voir [**12**] pour les détails.

Soit U un ouvert de X tel que la restriction de $\mathcal{T}$ sur U soit un tore. On considère la catégorie des tores sur U. À chaque tore $\mathbb{T}$ sur U, on note $\mathcal{T}=\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})$ le modèle de Néron qui lui associe et on considère le groupe des composantes connexes du champ $\pi_0(\mathrm{Tors}_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k))$ de $\mathcal{T}$-torseurs sur $X\times_{\mathbb{F}_q}k$.

Remarquons que se donner un tore sur U est équivalent à se donner un $\mathbb{Z}$-module libre muni d'une action finie du groupe $\pi_1^{\text{géom}}(u,U)$ où u est un point géométrique de U. On associe à un tore $\mathbb{T}$ sur U la fibre en u du faisceau des cocaractères $X_*\mathbb{T}$ de $\mathbb{T}$, munie de l'action naturelle de $\pi_1^{\text{géom}}(u,U)$. Un tore est dit *induit* s'il existe une base de $\mathbb{Z}$-module $(X_*\mathbb{T})_u$ telle que l'action de $\pi_1^{\text{géom}}(u,U)$ se déduise d'une action transitive de $\pi_1^{\text{géom}}(u,U)$ sur cette base.

On peut montrer que le foncteur

$$\mathbb{T}\mapsto\pi_0(\mathrm{Tors}_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k))$$

vérifie les conditions suivantes :

- pour un tore induit $\mathbb{T}$, on a $\pi_0(\mathrm{Tors}_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k))\simeq\mathbb{Z}$,
- il est exact à droite.

D'après Kottwitz, il existe un isomorphisme de foncteurs

$$\pi_0(\mathrm{Tors}_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k)) \simeq (X_*\mathbb{T})_{\pi_1^{\text{géom}}(u,U)}.$$

10.3. On va montrer qu'il existe un $\mathcal{T}$-torseur $\mathcal{V}$ sur $X \times_{\mathbb{F}_q} k$ tel que

$$\mathcal{V}^\sigma \otimes \mathcal{V}^{-1} = \mathcal{T}'.$$

Remarque 10.3. La notation $\otimes$ signifie la loi de groupe dans la catégorie de Picard $\mathrm{Tors}_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k)$.

On considère l'application de Lang

$$\begin{aligned}\mathrm{Lang} : \mathrm{Tors}_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k) &\to \mathrm{Tors}_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k),\\ \mathcal{V} &\mapsto \mathcal{V}^\sigma \otimes \mathcal{V}^{-1}.\end{aligned}$$

D'après Lang, l'application $\mathrm{Lang} : \mathrm{Tors}^0_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k) \to \mathrm{Tors}^0_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k)$ est surjective. Donc, pour déterminer l'image de cette application, on doit étudier l'image de

$$\pi_0(\mathrm{Lang}) : \pi_0(\mathrm{Tors}_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k)) \to \pi_0(\mathrm{Tors}_{\mathrm{Ner}^0(\mathbb{T})}(k)).$$

On utilise l'isomorphisme de foncteur ci-dessus, alors

$$\begin{aligned}\pi_0(\mathrm{Lang}) : (X_*\mathbb{T})_{\pi_1^{\text{géom}}(u,U)} &\to (X_*\mathbb{T})_{\pi_1^{\text{géom}}(u,U)},\\ t &\mapsto \sigma(t) - t.\end{aligned}$$

En utilisant la suite exacte

$$0 \to \pi_1^{\text{géom}}(u,U) \to \pi_1(u,U) \to \langle\sigma\rangle \to 0,$$

on déduit que l'image de $\pi_0(\mathrm{Lang})$ est le noyau de

$$X_*(\mathbb{T})_{\pi_1^{\text{géom}}(u,U)} \to X_*(\mathbb{T})_\Gamma.$$

En résumé, l'équation $\mathcal{V}^\sigma \otimes \mathcal{V}^{-1} = \mathcal{T}'$ a une solution si l'image de $\mathcal{T}'$ dans $(X_*\mathbb{T})_\Gamma$ est triviale. C'est le cas parce que, par construction de $\mathcal{T}'$, l'image de $\mathcal{T}'$ dans $(X_*\mathbb{T})_\Gamma = (Z(\hat{\mathbb{T}})^\Gamma)^*$ est

$$\sum_{x\in X} \mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$$

qui s'annule.

10.4. On sait qu'il existe un $\mathcal{T}$-torseur $\mathcal{V}$ sur $\bar{X}$ tel que $\mathcal{V}^\sigma = \mathcal{V} \otimes \mathcal{T}'$. En restreignant à la fibre générique, on obtient un G_{γ_0}-chtouca sur $F \otimes_{\mathbb{F}_q} k$

$$\tau_{\gamma_0} : V_{\gamma_0}^\sigma \to V_{\gamma_0},$$

dont les invariants locaux sont exactement $\mathrm{inv}_x(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$. Ce chtouca induit un G-chtouca sur $F\otimes_{\mathbb{F}_q} k$

$$\tau : V^\sigma \to V$$

qui commute avec l'automorphisme $\gamma_0 : V\to V$. Pour récuperer τ', on pose

$$\tau' = \gamma_0^{-1}\tau_0^s.$$

Il résulte de la définition des facteurs locaux $\mathrm{inv}_x(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ que (V,τ,τ') est bien dans $C(T,T',s)$ et que le triplet associé est bien $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$.

La preuve de la proposition 10.1 est terminée.

11. Comptage des classes d'isogénie ayant un triplet $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ donné

Proposition 11.1. *On fixe un triplet* $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$. *Supposons qu'il existe une classe d'isogénie* (V,τ,τ') *dont le triplet associé est* $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$. *Alors, le nombre de telles classes d'isogénie est le cardinal de l'ensemble fini*

$$\ker^1(F,G_{\gamma_0}) = \ker\Big[H^1(F,G_{\gamma_0}) \to \prod_{x\in X} H^1(F_x,G_{\gamma_0})\Big].$$

Démonstration. Puisque γ_0 est régulier, G_{γ_0} est un tore, en particulier, il est commutatif.

Supposons que (V,τ,τ') est une classe d'isogénie dont le triplet de Kottwitz associé est $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$. Comme on ne s'intéresse que de sa classe d'isomorphisme, on peut toujours supposer que $V = G(F\otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ et $\gamma_0 = \tau^s\tau'^{-1}$. On se ramène à compter le nombre des classes d'isomorphismes de triplets $(G(F\otimes_{\mathbb{F}_q} k),\tau,\gamma_0)$ tels que le triplet associé est $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$.

Étant donné un tel triplet, on peut représenter τ par un élément de $G(F\otimes_{\mathbb{F}_q} k)$, notons encore τ. Puisque τ et γ_0 commutent, il est en fait dans $G_{\gamma_0}(F\otimes_{\mathbb{F}_q} k)$.

Supposons qu'on a une autre classe d'isogénie $(G(F\otimes_{\mathbb{F}_q} k),\tau_1,\gamma_0)$ dont le triplet de Kottwitz est $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$. On définit un élément de $G_{\gamma_0}(F\otimes_{\mathbb{F}_q} k)$

$$b = \tau\tau_1^{-1}.$$

Alors, les deux triplets sont isomorphes si et seulement si la classe de σ-conjugaison de b dans $G_{\gamma_0}(F\otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ est triviale.

Comme les facteurs locaux γ_x et δ_x associés à deux triplets sont les mêmes, on en déduit que la classe de σ-conjugaison de b dans $G_{\gamma_0}(F_x\otimes_{\mathbb{F}_q} k)$ est triviale.

D'où le nombre qu'on veut calculer est le cardinal du noyau

$$G_{\gamma_0}(F\otimes_{\mathbb{F}_q} k)/\sigma\text{-conjugaison} \to \prod_{x\in X} G_{\gamma_0}(F_x\otimes_{\mathbb{F}_q} k)/\sigma\text{-conjugaison}.$$

Pour terminer la preuve, il suffit de voir que b provient en fait de $H^1(F,G_{\gamma_0})$. Pour cela, on note $\mathcal{T}$ le modèle de Néron de $\mathbb{T} = G_{\gamma_0}$, en particulier $\mathcal{T}$ est un schéma en groupes lisse à fibres connexes sur la courbe X dont la fibre générique est $\mathbb{T}$.

On suppose que b est définie sur une extension finie $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$ de F. On note $\mathcal{T}_n = \mathcal{T} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$. Alors, b définit une application σ-linéaire sur la fibre générique de $\mathcal{T}_n$:

$$b : \mathbb{T}^\sigma(F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}) \to \mathbb{T}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}).$$

En itérant n fois, on obtient un automorphisme b^n de $\mathbb{T}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n})$, autrement dit $b^n \in \mathbb{T}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n})$.

On va montrer que b^n est une section globale de $\mathcal{T}_n$ sur $X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}$, ce qui équivaut à vérifier que $b^n \in \mathcal{T}(\mathcal{O}_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$ pour toutes les places $x \in X$. Comme $b^n \in \mathbb{T}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n})$, cet élément appartient à $\mathcal{T}(\mathcal{O}_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$ pour toutes les places x sauf un ensemble fini de places S.

Soit x une place dans S. Puisque la classe de σ-conjugaison de b dans $\mathbb{T}(F_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$ est triviale, quitte à augmenter n, on peut supposer que la classe de σ-conjugaison de b dans $\mathbb{T}(F_x \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n})$ est triviale. Ceci implique que b^n est l'automorphisme identité de $\mathbb{T}(F_x \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n})$. En particulier, b^n appartient à $\mathcal{T}(\mathcal{O}_x \hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$.

On sait que b^n appartient à $H^0(X \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n}, \mathcal{T}_n)$. Comme ce groupe est un groupe fini, il existe un entier m tel que $b^{nm} = 1$, ce qui implique que b est dans $H^1(F, G_{\gamma_0})$. La preuve est terminée. □

12. La partie elliptique régulière

En mettant tous les résultats ensemble, on obtient le théorème suivant.

Théorème 12.1. *On a la formule :*

$$\begin{aligned}&\#\mathcal{C}^{I,\mathrm{reg,ell}}_{\lambda_{\bar{T}},\beta_{T'}}(T,T',s)_J\\ &\quad= \sum_{(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)} \ker^1(F,G_{\gamma_0})\cdot \mathrm{d}g(K_I^T)\mathrm{vol}(JG_{\gamma_0}(F)\backslash G_{\gamma_0}(\mathbb{A})) \prod_{x\notin T} \mathbf{0}_{\gamma_x}(\phi_{\beta_x}) \prod_{x\in T} \boldsymbol{TO}_{\delta_x}(\phi_{\lambda_x}),\end{aligned}$$

où la somme parcourt tous les triplets de Kottwitz $(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ *tels que* γ_0 *soit régulier elliptique et l'invariant* $\mathrm{inv}(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)$ *s'annule.*

C'est la version analogue pour la partie régulière elliptique du comptage des points des variétés de Shimura qui a été fait par Kottwitz (cf. [**8**]).

Remerciements. Nous remercions R. Kottwitz pour ses encouragements et pour d'utiles discussions. Nous remercions le referee pour sa lecture attentive de notre article.

Références

1. A. Beilinson et V. Drinfeld, Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves, prépublication.
2. S. Bosch, W. Lutkebohmert et M. Raynaud, *Neron models*, Ergebnisse der Mathematik, Volume 21 (Springer, 1990).
3. V. Drinfeld, Varieties of modules of F-sheaves, *Funct. Analysis Applic.* **21** (1987), 107–122.
4. M. Greenberg, Schemata over local rings, II, *Ann. Math.* **78**(2) (1963), 256–266.

5. R. KOTTWITZ, Rational conjugacy classes in reductive groups, *Duke Math. J.* **49**(4) (1982), 785–806.
6. R. KOTTWITZ, Stable trace formula: elliptic singular terms, *Math. Ann.* **275** (1986), 365–399.
7. R. KOTTWITZ, Shimura varieties and λ-adic representations, in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Volume I, pp. 161–209, Perspectives in Mathematics, Volume 10 (Academic Press, 1990).
8. R. KOTTWITZ, Points on some Shimura varieties over finite fields, *J. Am. Math. Soc.* **5** (1992), 373–444.
9. L. LAFFORGUE, *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan–Petersson*, Astérisque, Volume 243 (Société Mathématique de France, Paris, 1997).
10. L. LAFFORGUE, Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, *Invent. Math.* **147** (2002), 1–241.
11. B.-C. NGÔ, $\mathcal{D}$-chtoucas de Drinfeld à modifications symétriques et identité de changement de base, *Annls Scient. Éc. Norm. Sup.* **39** (2006), 197–243.
12. B.-C. NGÔ, Fibration de Hitchin et endoscopie, *Invent. Math.* **164** (2006), 399–453.
13. T. NGÔ DAC, Compactification des champs de chtoucas et théorie géométrique des invariants, Thèse de l'Université de Paris Sud (2004).
14. M. RAPOPORT, A guide to the reduction of Shimura varieties, *Astérisque* **298** (2005), 271–318.
15. J.-P. SERRE, *Cohomologie galoisienne*, 5e édition, Springer Lecture Notes in Mathematics, Volume 5 (Springer, 1994).
16. R. STEINBERG, Regular elements of semisimple algebraic groups, *Publ. Math. IHES* **25** (1965), 49–80.
17. Y. VARSHAVSKY, Moduli spaces of principal F-bundles, *Selecta Math.* **10** (2004), 131–166.