# RÉSOLUTIONS DE DEMAZURE AFFINES ET FORMULE DE CASSELMAN-SHALIKA GÉOMÉTRIQUE

B.C. NGÔ ET P. POLO

Abstract. We prove a conjecture of Frenkel, Gaitsgory, Kazhdan, Vilonen, related to Fourier coefficients of spherical perverse sheaves on the affine Grassmannian associated to a split reductive group.

## Introduction

Soit $G$ un groupe réductif connexe déployé sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. Notons $\mathcal{O} = k[[\varpi]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans $k$ et $F$ le corps des fractions de $\mathcal{O}$. Soit $K = G(\mathcal{O})$ le sous-groupe compact maximal standard de $G(F)$. Pour tout cocaractère dominant $\lambda$ de $G$, il est possible de construire un $k$-schéma projectif $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ dont l'ensemble des $k$-points est

$$\bar{\mathcal{Q}}_\lambda(k) = \coprod_{\lambda' \leq \lambda} K\varpi^{\lambda'}K/K,$$

sur lequel agit le groupe $K$, vu comme un $k$-groupe algébrique de dimension infinie, à travers un quotient de type fini. Cette action induit une stratification en orbites $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda = \coprod_{\lambda' \leq \lambda} \mathcal{Q}_{\lambda'}$ parmi lesquelles $\mathcal{Q}_\lambda$ est l'orbite ouverte. De plus, les $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ s'organisent en une famille inductive dont la limite est le réduit associé à la Grassmannienne affine $\mathcal{Q}$ définie comme dans [2, 17].

Le schéma $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ n'étant pas lisse en général, pour un nombre premier $\ell$ différent de la caractéristique de $k$, il est naturel de considérer le complexe d'intersection $\ell$-adique

$$\mathcal{A}_\lambda = \mathrm{IC}(\bar{\mathcal{Q}}_\lambda, \bar{\mathbb{Q}}_\ell),$$

qui est $K$-équivariant. La fonction trace de Frobenius associée à ce faisceau pervers :

$$A_\lambda(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_q, (\mathcal{A}_\lambda)_x),$$

définie sur l'ensemble des $k$-points de $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$, peut être vue comme un élément de l'algèbre de Hecke non ramifiée $\mathcal{H}$ des fonctions à valeurs

*Date*: publié dans Journal of Algebraic Geometry 10 (2001) 515-547.

dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, à support compact dans $G(F)$, qui sont invariantes à gauche et à droite par $K$. Lorsque $\lambda$ parcourt le cône des cocaractères dominants, ces fonctions $A_\lambda$ forment une base de $\mathcal{H}$.

Soit $G^\vee$ le groupe défini sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ dont la donnée radicielle est duale de celle de $G$. Dans [27], Satake a construit un isomorphisme canonique entre l'algèbre $\mathcal{H}$ et l'algèbre des fonctions régulières sur $G^\vee$ qui sont $\mathrm{Ad}(G^\vee)$-invariantes. D'après Lusztig et Kato, voir [19], [15], la transformation de Satake de $A_\lambda$ est égale, à un signe près, au caractère de $V(\lambda)$, la représentation irréductible de plus haut poids $\lambda$ de $G^\vee$. Plus récemment, Ginzburg [11] et Mirkovic, Vilonen [22] ont mis en lumière une équivalence tannakienne entre la catégorie des faisceaux pervers $K$-équivariants semi-simples sur $\mathcal{Q}$ munie d'un produit de convolution et la catégorie des représentations algébriques de $G^\vee$ munie du produit tensoriel. Le théorème de Lusztig-Kato serait le reflet au niveau des objets simples de cette équivalence, via la formule des traces de Grothendieck [12].

Les termes constants ainsi que les coefficients de Fourier des fonctions $A_\lambda$ sont remarquablement simples. Soit $B = TU$ un sous-groupe de Borel de $G$ et $\rho$ la demi-somme des racines de $T$ dans $\mathrm{Lie}(U)$. D'après Lusztig et Kato, l'intégrale terme constant est égale à

$$\int_{U(F)} A_\lambda(x\varpi^\nu)\,dx = (-1)^{2\langle\rho,\nu\rangle} q^{\langle\rho,\nu\rangle} m_\lambda(\nu),$$

où $m_\lambda(\nu)$ est la dimension de l'espace de poids $\nu$ dans $V(\lambda)$. Parallèlement, pour $\theta : U(F) \to \mathbb{Q}_\ell^\times$ un caractère générique, de conducteur $U(\mathcal{O})$, Frenkel, Gaitsgory, Kazhdan et Vilonen ont démontré dans [9], que

$$\int_{U(F)} A_\lambda(x\varpi^\nu)\theta(x)\,dx = 0$$

si $\nu \neq \lambda$ et

$$\int_{U(F)} A_\nu(x\varpi^\nu)\theta(x)\,dx = (-1)^{2\langle\rho,\nu\rangle} q^{\langle\rho,\nu\rangle}.$$

Leur démonstration s'appuie sur la formule explicite de Casselman-Shalika des valeurs des fonctions de Whittaker non ramifiées [28], [5].

L'objet principal de notre travail est de démontrer les énoncés géométriques sous-jacents à ces résultats. Pour tout cocaractère $\nu$, il est possible de définir un sous-ind-schéma $S_\nu \subset \mathcal{Q}$ tel que

$$S_\nu(k) = U(F)\varpi^\nu G(\mathcal{O})/G(\mathcal{O}).$$

Il s'agit de démontrer que le complexe

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\lambda)$$

est concentré en degré $2\langle\rho,\nu\rangle$ et que l'endomorphisme de Frobenius agit dans son $\mathrm{H}^{2\langle\rho,\nu\rangle}$ comme la multiplication par $q^{\langle\rho,\nu\rangle}$. Cet énoncé est dû à Mirkovic et Vilonen lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$ et joue un rôle important dans l'équivalence tannakienne mentionnée plus haut. Il peut aussi être considéré comme une interprétation géométrique partielle du théorème de Lusztig-Kato.

Lorsque $\nu$ est dominant, on peut définir un morphisme $h : S_\nu \to \mathbb{G}_a$ tel que $\theta(x) = \psi(h(x))$, où $\psi : k \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est un caractère additif non trivial de $k$. On démontre que le complexe

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\lambda \otimes h^*\mathcal{L}_\psi)$$

est nul si $\nu \neq \lambda$. Dans le cas $\nu = \lambda$, il est isomorphe à $\bar{\mathbb{Q}}_\ell(-\langle\rho,\nu\rangle)$ placé en degré $2\langle\rho,\nu\rangle$. Cet énoncé était une conjecture de Frenkel, Gaitsgory, Kazhdan et Vilonen [9]. Comme expliqué dans *loc. cit.*, il fournit une démonstration géométrique du théorème de Casselman-Shalika. Il pourrait également fournir des résultats pour les groupes tordus.

Voici l'organisation de l'article. Après avoir rappelé, dans la section 2, des résultats connus sur la Grassmannienne affine, nous énonçons les résultats principaux (théorèmes 3.1 et 3.2) dans la section 3.

La démonstration de ces théorèmes occupe le reste de l'article. Elle repose sur l'étude de la géométrie de certaines résolutions, formées à partir des variétés $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ les plus simples, qui correspondent au cas où $\lambda$ est minuscule ou quasi-minuscule. Cette stratégie est déjà utilisée dans [23], où la conjecture de [9] a été démontrée pour le groupe $\mathrm{GL}_n$.

De façon plus détaillée, dans les sections 4 et 5, nous démontrons de façon géométrique deux énoncés (lemmes 4.2 et 5.2) concernant les intersections $S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$, qui sont probablemment bien connus, mais que nous n'avons su trouver, sous cette forme, dans la littérature. Le lemme 5.2 nous permet de démontrer les théorèmes 3.1 et 3.2 dans le cas où $\nu$ et $\lambda$ sont conjugués par un élément du groupe de Weyl.

Nous signalons, au passage, un énoncé (proposition 4.3) sur les caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi_c(S_\nu \cap \mathcal{Q}_\lambda)$ qui peut être considéré comme une interprétation géométrique d'un résultat de Lusztig [19, 6.1].

Nous étudions ensuite, dans les sections 6–8, la géométrie des variétés $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ dans les cas les plus simples, c.à.d. lorsque $\lambda$ est minuscule (section 6), ou quasi-minuscule (sections 7 et 8).

Si $\lambda$ est minuscule, alors $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ est égal à $\mathcal{Q}_\lambda$ et est isomorphe au schéma $G/P$ des sous-groupes de $G$ conjugués à un certain sous-groupe parabolique $P$; de plus, seuls les $\nu$ conjugués à $\lambda$ interviennent, si bien que les énoncés 3.1 et 3.2 découlent dans ce cas du lemme 5.2.

Si $\lambda$ est quasi-minuscule, alors le point base de $\mathcal{Q}$ est l'unique point singulier de $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$. L'ouvert complémentaire de ce point, l'orbite $\mathcal{Q}_\lambda$, est un fibré en droites au-dessus d'un $G/P$. Nous construisons une résolution (lemme 7.3) de $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ par un fibré en droites projectives au-dessus de $G/P$, qui nous permettra de démontrer, dans la section 8, les théorèmes 3.1 et 3.2 dans ce cas.

Dans la section 9, on considère certaines résolutions, qui conduisent à des produits de convolution de la forme $\mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n}$ où chaque $\mu_i$ est minuscule ou quasi-minuscule. L'idée essentielle de la démonstration est que chaque $\mathcal{A}_\lambda$ apparaît comme facteur direct (avec une certaine multiplicité) d'un tel produit. Cette assertion est ramenée à un énoncé combinatoire, dont nous donnons deux preuves différentes dans la section 10. L'une repose sur un lemme simple sur les systèmes des racines, l'autre est basée sur la théorie des représentations et le modèle des chemins de Littelmann.

Armés de la connaissance explicite des cas minuscule et quasi-minuscule, et des résultats de la section 9, on peut alors démontrer les théorèmes 3.1 et 3.2 en suivant l'argument de [23]. Ceci est le contenu de la section 11.

Nos résultats ont été exposés au séminaire Formes automorphes de l'Université Paris 7 en Février 1999, et au Number theory seminar du Max Planck Institut fuer Mathematik en Juin 1999. En Juillet 1999, Frenkel, Gaitsgory et Vilonen ont annoncé une autre démonstration de la conjecture de [9], par une voie différente et indépendante [10].

Pendant la rédaction de ce travail, B.C. Ngô a bénéficié de l'hospitalité du Max Planck Institut fuer Mathematik. Il remercie G. Laumon et M. Rapoport pour d'utiles discussions sur le sujet de cet article.

Nous remercions le rapporteur pour sa lecture attentive du manuscrit.

## 1. Notations

Soit $k$ un corps fini à $q$ éléments et de caractéristique $p$. Notons $\bar{k}$ sa clôture algébrique. Nous supposons, pour des raisons de commodité, que $G$ est un groupe algébrique semi-simple déployé sur $k$, la généralisation aux groupes réductifs étant évidente. Soient $T$ un tore maximal déployé de $G$, et $B, B^-$ deux sous-groupes de Borel tels que $B \cap B^- = T$. On note $U$ (resp. $U^-$) le radical unipotent de $B$ (resp. $B^-$). On pose $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$.

On note $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement naturel entre $X := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ et $X^\vee := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$. Soient $R \subset X$ le système de racines associé à $(G,T)$, $R_+$ (resp $R_-$) l'ensemble des racines correspondant à $B$ (resp. $B^-$) et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ l'ensemble des racines simples. Pour tout $\alpha \in R$, on désigne par $U_\alpha$ le sous-groupe radiciel de $G$ correspondant à la racine $\alpha$. Soit $R^\vee \subset X^\vee$ le système de racines dual muni de la bijection $R \to R^\vee$, $\alpha \mapsto \alpha^\vee$. Notons $R_+^\vee$ l'ensemble des coracines positives. Soit $W$ le groupe de Weyl de $(G, T)$.

Soit $\rho = (1/2) \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$ la demi-somme des racines positives. Pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, on a $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1$.

On note $Q^\vee$ (resp. $Q_+^\vee$) le sous-groupe (resp. le sous-monoïde) de $X^\vee$ engendré par $R^\vee$ (resp. $R_+^\vee$). On désigne par $X_+^\vee$ le cône des cocaractères dominants :

$$X_+^\vee = \{\lambda \in X^\vee \mid \langle \alpha, \lambda \rangle \geq 0,\ \forall \alpha \in R_+\}.$$

On considère l'ordre partiel sur $X^\vee$ défini comme suit : $\nu \geq \nu'$ si et seulement si $\nu - \nu' \in Q_+^\vee$.

On note $G^\vee$ le groupe dual, considéré sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$; il est muni des sous-groupes $T^\vee \subset B^\vee$. Pour tout $\lambda \in X_+^\vee$, on note

$$\Omega(\lambda) = \{\nu \in X^\vee \mid \forall w \in W, w\nu \leq \lambda\};$$

c'est l'ensemble des poids de $T^\vee$ dans $V(\lambda)$, le $G^\vee$-module simple, sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, de plus haut poids $\lambda$ (voir, par exemple, [3, Chap.VIII, Ex.7.1] ou [13, Prop. 23.1]).

On notera $M$ l'ensemble des éléments minimaux de $X_+^\vee \setminus \{0\}$.

**Lemme 1.1.** *Soit $\mu \in M$. On a l'une des alternatives suivantes.*

1. *Si $\langle \alpha, \mu \rangle \in \{0, \pm 1\}$ pour tout $\alpha \in R$, alors $\mu$ est un élément minimal de $X_+^\vee$ et l'on a $\Omega(\mu) = W\mu$. Dans ce cas, on dira que $\mu$ est un cocaractère minuscule.*
2. *Sinon, il existe une unique racine $\gamma$ telle que $\langle \gamma, \mu \rangle \geq 2$; c'est une racine positive maximale, et l'on a $\mu = \gamma^\vee$ et $\Omega(\mu) = W\mu \cup \{0\}$. Dans ce cas, on dira que $\mu$ est quasi-minuscule.*

*Démonstration.* Compte-tenu des références citées avant le lemme, la première assertion résulte de [3, Chap.VI, Ex.1.24]. Voyons la seconde.

Soit $\gamma \in R$ tel que $\langle \gamma, \mu \rangle \geq 2$. D'après [3, Chap.VI, Ex.1.23] ou [13, Prop. 23.1], $\mu - \gamma^\vee$ est $W$-conjugué à un poids dominant $\leq \mu$, donc à 0 ou $\mu$ (puisque $\mu \in M$). Or, comme $\langle \gamma, \mu \rangle \geq 2$, on voit facilement que la norme de $\mu - \gamma^\vee$ (relativement à un produit scalaire $W$-invariant) est strictement inférieure à celle de $\mu$. On en déduit que $\mu = \gamma^\vee$, et que $\gamma$ est l'unique racine telle que $\langle \gamma, \mu \rangle \geq 2$. Soient $R_\gamma$ (resp. $R_{\gamma^\vee}^\vee$) le sous-système de racines irréductible de $R$ (resp. $R^\vee$) contenant $\gamma$ (resp. $\gamma^\vee$); on dira que les éléments de $R_{\gamma^\vee}^\vee$ de longueur minimale sont des coracines courtes. Il est alors bien connu que l'égalité $\Omega(\gamma^\vee) = W\gamma^\vee \cup \{0\}$ entraîne que $\gamma$ est l'unique racine maximale de $R_\gamma$; de façon équivalente, $\gamma^\vee$ est l'unique coracine courte dominante de $R_{\gamma^\vee}^\vee$ (*c.f.* [3, Chap.VIII, 7.22]. □

Remarque. L'usage du mot minuscule est ici plus général que celui de [3], qui se limite au cas où $R$ est irréductible, auquel cas un copoids minuscule est nécessairement un copoids fondamental.

Soient $\mathcal{O} = k[[\varpi]]$ l'anneau des séries formelles en une variable $\varpi$ et $F = k(\!(\varpi)\!)$ son corps des fractions.

Pour chaque élément $\nu \in X^\vee$, on note $\varpi^\nu \in T(F)$ l'image par le cocaractère $\nu$, de l'uniformisante $\varpi \in F^\times$. On rappelle (voir [6, §3.5] et [21]) les décompositions de Cartan et d'Iwasawa

$$\begin{aligned} G(F) &= \coprod_{\lambda \in X^\vee_+} G(\mathcal{O})\varpi^\lambda G(\mathcal{O}); \\ G(F) &= \coprod_{\nu \in X^\vee} U(F)\varpi^\nu G(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

*Convention.* Sauf mention expresse du contraire, quand on parle de points de $k$-schémas, il s'agira des points à valeurs dans une $k$-algèbre arbitraire. Par *stratification* d'un $k$-schéma $X$, on entend la donnée des sous-schémas localement fermés $X_\alpha$ de $X$, deux à deux disjoints, tels que $X = \cup X_\alpha$.

## 2. La Grassmannienne affine

Rappelons la construction de la Grassmannienne affine $\mathcal{Q}$, tirée de [2] et [17]. Comme dans *loc. cit.*, appelons $k$-espaces, resp. $k$-groupes, les faisceaux d'ensembles, resp. de groupes, sur la catégorie des $k$-algèbres munie de la topologie fidèlement plate et de présentation finie.

Considérons le $k$-groupe $LG$ et son $k$-sous-groupe $L^{\geq 0}G$, qui associent à chaque $k$-algèbre $R$, le groupe $G(R(\!(\varpi)\!))$ et le sous-groupe $G(R[[\varpi]])$. Ces constructions s'appliquent aussi aux sous-groupes $T$ et $U$ de $G$, à la place de $G$.

Il est clair que $L^{\geq 0}G$ est représenté par le schéma en groupes limite projective des schémas en groupes de type fini $R \mapsto G(R[[\varpi]]/(\varpi^n))$. Pour définir une structure d'ind-schéma sur $LG$, choisissons une représentation fidèle $\rho : G \to SL(V)$. Notons $L^{(N)}G(R)$ l'ensemble des $g \in LG(R)$ tel que l'ordre des pôles de $\rho(g)$ et de $\rho(g^{-1})$ n'excède pas $N$. D'après *loc. cit.*, $L^{(N)}G$ est représentable par un schéma, et le faisceau $\mathcal{Q}$ associé au préfaisceau $R \mapsto G(R(\!(\varpi)\!))/G(R[[\varpi]])$ est une limite inductive de schémas projectifs $\mathcal{Q}^{(N)} = L^{(N)}G/L^{\geq 0}G$.

Notons $L^{\leq 0}G$ le $k$-groupe $R \mapsto G(R[\varpi^{-1}])$ et $L^{<0}G$ le noyau du morphisme $L^{\leq 0}G \to G$ défini par $\varpi^{-1} \mapsto 0$. Ce sont des $k$-sous-groupes de $LG$.

D'après [2, Prop. 1.11] et [17, Prop. 4.6], on a alors le lemme suivant. Dans *loc. cit.*, $G$ est supposé simplement connexe et $k = \mathbb{C}$, mais la démonstration s'étend au cas général. Ce résultat découle aussi d'un théorème de Ramanathan [26].

**Lemme 2.1.** *Le morphisme de multiplication*

$$L^{<0}G \times L^{\geq 0}G \to LG$$

*est une immersion ouverte.*

Identifions $L^{<0}G$ à l'ouvert $L^{<0}Ge_0$, où $e_0$ désigne le point base de $\mathcal{Q}$. La Grassmannienne affine $\mathcal{Q}$ est recouverte par les ouverts translatés $gL^{<0}Ge_0$ au-dessus desquels la fibration $LG \to \mathcal{Q}$ est triviale. Ces ouverts trivialisants sont utiles pour étudier de manière plus explicite la géométrie locale de $\mathcal{Q}$. Par exemple, $L^{<0}G$ n'est pas réduit en général si bien que $\mathcal{Q}$ ne l'est pas non plus.

Le groupe $L^{\geq 0}G$ agit naturellement sur $\mathcal{Q}$. Pour tout $\lambda \in X^\vee$, notons $e_\lambda$ le point $\varpi^\lambda e_0$ de $\mathcal{Q}$. Pour $\lambda \in X^\vee_+$, notons $\mathcal{Q}_\lambda$ l'orbite de $L^{\geq 0}G$ passant par $e_\lambda$. Notons $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ l'adhérence de $\mathcal{Q}_\lambda$. Introduisons aussi les sous-groupes $L^{\geq\lambda}G := \varpi^\lambda L^{\geq 0}G\varpi^{-\lambda}$ et $L^{<\lambda}G := \varpi^\lambda L^{<0}G\varpi^{-\lambda}$.

Notons $J$ l'image inverse du radical unipotent $U$ de $B$ par l'homomorphisme $L^{\geq 0}G \to G$ défini par $\varpi \mapsto 0$ ; c'est une limite projective de groupes unipotents. Posons $J^{\geq\lambda} = J \cap L^{\geq\lambda}G$ et $J^\lambda = J \cap L^{<\lambda}G$.

Quelques soient $\alpha \in R$ et $i \in \mathbb{Z}$, on désigne par $U_{\alpha,i}$ l'image de l'homomorphisme $\mathbb{G}_a \to LG$ défini par $x \mapsto U_\alpha(\varpi^i x)$. La multiplication définit un isomorphisme

$$\prod_{\alpha\in R_+,\langle\alpha,\lambda\rangle>0} \prod_{i=0}^{\langle\alpha,\lambda\rangle-1} U_{\alpha,i} \to J^\lambda$$

(en choisissant un ordre total sur l'ensemble des facteurs). En particulier, $J^\lambda$ est isomorphe à l'espace affine de dimension $2\langle\rho,\lambda\rangle$.

**Lemme 2.2.** *Le morphisme naturel $J^\lambda \to \mathcal{Q}_\lambda$ défini par $j \mapsto je_\lambda$ est une immersion ouverte.*

*Démonstration.* Il est clair que la multiplication induit un isomorphisme $J^\lambda \times J^{\geq\lambda} \to J$. Il est aussi clair que la multiplication induit une immersion ouverte $J \times B^- \to L^{\geq 0}G$. Par ailleurs, $J^{\geq\lambda}$ et $B^-$ sont des sous-groupes de $L^{\geq\lambda}G$ qui fixent $e_\lambda$. Le lemme s'en déduit. □

Il résulte du lemme que l'orbite $\mathcal{Q}_\lambda$ est lisse, irréductible et de dimension $2\langle\rho,\lambda\rangle$. Elle est incluse dans un $\mathcal{Q}^{(N)}$ pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand si bien que son adhérence $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ est un schéma projectif, irréductible et stable par l'action de $L^{\geq 0}G$. Il est bien connu, voir [19, §11], que $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ est la réunion des orbites $\mathcal{Q}_{\lambda'}$ avec $\lambda' \leq \lambda$. En particulier, si $\mu \in X^\vee_+$ est nul ou bien minuscule, l'orbite $\mathcal{Q}_\mu$ est un schéma projectif lisse.

Notons $L^{>0}G$ le noyau de l'homomorphisme $L^{\geq 0}G \to G$; c'est une limite projective de groupes unipotents. Il est clair que pour tout

$\lambda \in X_+^\vee$, le morphisme

$$(L^{>0}G \cap L^{\geq\lambda}G) \times (L^{>0}G \cap L^{<\lambda}G) \to L^{>0}G$$

est un isomorphisme et que

$$L^{>0}G \cap L^{<\lambda}G = \prod_{\alpha \in R_+, \langle\alpha,\lambda\rangle > 1} \prod_{i=1}^{\langle\alpha,\lambda\rangle - 1} U_{\alpha,i}.$$

Soit $P_\lambda$ le sous-groupe parabolique de $G$ engendré par $B^-$ et par les sous-groupes radiciels $U_\alpha$ avec $\langle\alpha,\lambda\rangle = 0$. Le groupe de Weyl de $P_\lambda$ est égal au stabilisateur $W_\lambda$ de $\lambda$. Notons $U_\lambda^+$ le radical unipotent du parabolique opposé à $P_\lambda$. Il est clair que $P_\lambda \subset L^{\geq\lambda}G$ et que $J^\lambda = U_\lambda^+ \ltimes (L^{>0}G \cap L^{<\lambda}G)$.

**Lemme 2.3.** *On a*

$$L^{\geq 0}G \cap L^{\geq\lambda}G = P_\lambda \ltimes (L^{>0}G \cap L^{\geq\lambda}G).$$

*En particulier, le groupe $L^{\geq 0}G \cap L^{\geq\lambda}G$ est géométriquement connexe, et l'on a $G \cap L^{\geq\lambda}G = P_\lambda$.*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer que le morphisme de multiplication

$$(L^{>0}G \cap L^{\geq\lambda}G) \times P_\lambda \to L^{\geq 0}G \cap L^{\geq\lambda}G$$

est un isomorphisme.

Soit $g$ un point de $L^{\geq 0}G$ qui s'écrit sous la forme $g = g^+g^-uwp$ où $g^+ \in (L^{>0}G \cap L^{\geq\lambda}G)$, où $g^- \in (L^{>0}G \cap L^{<\lambda}G)$, où $u \in (U \cap wU_\lambda^+w^{-1})$, où $p \in P_\lambda$ et où $w$ est de longueur minimale dans sa classe $wW_\lambda$.

Supposons que $g \in L^{\geq\lambda}G$. Puisque $g^+$ et $p$ appartiennent déjà à ce groupe, il en est de même de $g^-uw$. On a donc

$$\varpi^{-\lambda}g^-uw\varpi^\lambda = (\varpi^{-\lambda}g^-u\varpi^\lambda)\varpi^{w\lambda-\lambda}w \in L^{\geq 0}G.$$

Puisque $w$ appartient à $L^{\geq 0}G$, $g^-u$ appartient à $LU$ et $\varpi^{w\lambda-\lambda} \in LT$ et compte tenu de la décompostion d'Iwahori [6, 3.5], $\varpi^{-\lambda}g^-u\varpi^\lambda$ et $\varpi^{w\lambda-\lambda}$ appartiennent, tous les deux, à $L^{\geq 0}G$. Par ailleurs, $\varpi^{w\lambda-\lambda}$ appartient à $L^{\geq 0}G$ si et seulement si $w\lambda = \lambda$. Comme $w$ est de longueur minimale dans sa classe $wW_\lambda$, il vient $w = 1$. Donc, on a $u \in U_\lambda^+$. Compte tenu de la décomposition $J^\lambda = U_\lambda^+ \ltimes (L^{>0}G \cap L^{<\lambda}G)$ et du fait que $J^\lambda \cap L^{\geq 0}G = \{1\}$, on obtient $g^- = 1$ et $u = 1$. □

Soit $\ell$ un nombre premier différent de la caractéristique de $k$. Pour tout $\lambda \in X_+^\vee$, notons $\mathcal{A}_\lambda$ le complexe d'intersection $\ell$-adique de $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$. D'après le lemme précédent, le stabilisateur de chaque $e_\lambda$ dans $L^{\geq 0}G$ est géométriquement connexe. Par conséquent, tout faisceau pervers sur

$\mathcal{Q}$, géométriquement irréductible, $L^{\geq 0}G$-équivariant et dont le support est un schéma de type fini, est isomorphe à $\mathcal{A}_\lambda$ pour un certain $\lambda \in X_+^\vee$.

A la suite de Lusztig, Ginzburg, Mirkovic et Vilonen, voir [19, 20], [11] et [22], on va définir le produit de convolution $\mathcal{A}_{\lambda_1} * \mathcal{A}_{\lambda_2}$ pour $\lambda_1, \lambda_2 \in X_+^\vee$ comme suit. Considérons les morphismes

$$\mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \xleftarrow{\pi_1} LG \times \mathcal{Q} \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$$

définis par $\pi_1(g,x) = (ge_0, x)$ et $\pi_2(g,x) = (ge_0, gx)$. Le morphisme $\pi_1$ est le morphisme quotient pour l'action de $L^{\geq 0}G$ sur $LG \times \mathcal{Q}$ définie par

$$\alpha_1(h)(g,x) = (gh^{-1}, x).$$

Le morphisme $\pi_2$ est le morphisme quotient pour l'action de $L^{\geq 0}G$ sur $LG \times \mathcal{Q}$ définie par

$$\alpha_2(h)(g,x) = (gh^{-1}, hx).$$

Pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in X_+^\vee$, notons $\bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1} \tilde{\times} \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_2}$ le quotient de $\pi_1^{-1}(\bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1} \times \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_2})$ par $\alpha_2(L^{\geq 0}G)$. L'existence de ce quotient est assurée par la locale trivialité du morphisme $LG \to \mathcal{Q}$. Plus précisément, au-dessus des ouverts de $\bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1}$ de la forme $gL^{<0}Ge_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1}$, les schémas $\bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1} \tilde{\times} \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_2}$ et $\bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1} \times \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_2}$ sont isomorphes. De plus, ces isomorphismes sont clairement compatibles avec la stratification de $\bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1} \times \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_2}$ par les sous-schémas localement fermés $\mathcal{Q}_{\lambda_1'} \times \mathcal{Q}_{\lambda_2'}$ et celle de $\bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1} \tilde{\times} \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_2}$ par les sous-schémas localement fermés

$$\mathcal{Q}_{\lambda_1'} \tilde{\times} \mathcal{Q}_{\lambda_2'} = \pi_1^{-1}(\mathcal{Q}_{\lambda_1'} \times \mathcal{Q}_{\lambda_2'})/\alpha_2(L^{\geq 0}G),$$

avec $\lambda_1' \leq \lambda_1$ et $\lambda_2' \leq \lambda_2$. La projection sur le second facteur définit un morphisme

$$m : \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1} \tilde{\times} \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_2} \to \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1+\lambda_2}.$$

On pose

$$\mathcal{A}_{\lambda_1} * \mathcal{A}_{\lambda_2} = \mathrm{R}m_*(\mathcal{A}_{\lambda_1} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\lambda_2}),$$

où $\mathcal{A}_{\lambda_1} \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_{\lambda_2}$ désigne le complexe d'intersection de $\bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_1} \tilde{\times} \bar{\mathcal{Q}}_{\lambda_2}$.

La construction précédente, généralisée de la manière évidente, permet de définir le produit de convolution itéré

$$\mathcal{A}_{\lambda_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\lambda_n}$$

pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in X_+^\vee$. D'après [11] et [22], ce produit de convolution est encore un faisceau pervers, somme directe, avec multiplicités, de faisceaux pervers $\mathcal{A}_\lambda$ avec $\lambda \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Nous n'utiliserons ce résultat que dans le cas où les $\lambda_i$ appartiennent à l'ensemble $M$. Nous proposons une démonstration simple dans ce cas et montrons comment le cas général peut, en fait, se déduire de celui-ci.

## 3. Les énoncés principaux

Rappelons que $U$ désigne le radical unipotent du sous-groupe de Borel $B$ associé à $R_+$. On définit de façon analogue pour $U$, à la place de $G$, les groupes de lacets $LU$, $L^{\geq 0}U = LU \cap L^{\geq 0}G$ et $L^{<0}U = LU \cap L^{<0}G$. Pour tout $\nu \in X^\vee$, on note aussi $L^{\geq \nu}U = \varpi^\nu L^{\geq 0}U\varpi^{-\nu}$ et $L^{<\nu}U = \varpi^\nu L^{<0}U\varpi^{-\nu}$. La multiplication induit un isomorphisme

$$L^{\geq \nu}U \times L^{<\nu}U \to LU.$$

Pour tout $\nu \in X^\vee$, $L^{<\nu}U$ est un sous-groupe fermé de $L^{<\nu}G$ si bien qu'on peut identifier $L^{<\nu}Ue_0$ à un fermé, noté $S_\nu$, de l'ouvert $\varpi^\nu L^{<0}Ge_0$ de $\mathcal{Q}$. En particulier, pour tout $\lambda \in X^\vee_+$ et tout $\nu \in X^\vee$, $S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ est un sous-schéma localement fermé, éventuellement vide, de $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$. D'après la décomposition d'Iwasawa, ces intersections $S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ forment une stratification de $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$.

Nous donnerons une nouvelle démonstration du théorème suivant, dû à Mirkovic et Vilonen dans le cas $k = \mathbb{C}$ ([22]).

**Théorème 3.1.** *Quelques soient $\lambda \in X^\vee_+$ et $\nu \in X^\vee$, le complexe $\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_\lambda)$ est concentré en degré $2\langle\rho,\nu\rangle$. De plus, l'endomorphisme $\mathrm{Fr}_q$ agit dans $\mathrm{H}_c^{2\langle\rho,\nu\rangle}(S_\nu, \mathcal{A}_\lambda)$ comme $q^{\langle\rho,\nu\rangle}$.*

Dans l'énoncé précédent on a écrit $\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_\lambda)$ à la place de

$$\mathrm{R}\Gamma_c((S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda) \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\lambda),$$

pour alléger la notation. On utilisera systématiquement cette notation allégée dans la suite, cet abus de notation ne causant aucune ambiguité.

Soient $\nu \in X^\vee_+$ et $\nu' \in -X^\vee_+$. En choisissant un ordre total sur les racines positives, on a un isomorphisme

$$\prod_{\alpha \in R^+} \prod_{\langle\alpha,\nu'\rangle \leq i < \langle\alpha,\nu\rangle} U_{\alpha,i} = L^{<\nu}U \cap L^{\geq\nu'}U.$$

Pour $\nu$ fixé et pour $\nu'$ de plus en plus anti-dominant, ces groupes forment un système inductif dont la limite est $L^{<\nu}U$.

Pour toute racine simple $\alpha \in \Delta$, notons $u_{\alpha,i}$ la projection sur le facteur $U_{\alpha,i}$ et

$$h : L^{<\nu}U \cap L^{\geq\nu'}U \to \mathbb{G}_a$$

le morphisme $h(x) = \sum_{\alpha\in\Delta} u_{\alpha,-1}(x)$. Ce morphisme est visiblement compatible aux flèches de transition et induit sur la limite inductive un morphisme $h : L^{<\nu}U \to \mathbb{G}_a$, pour tout $\nu$ dominant. Compte tenu de l'isomorphisme $L^{<\nu}U \times L^{\geq\nu}U \to LU$, $u^-u^+ \mapsto u$, on peut définir un morphisme, noté aussi $h : LU \to \mathbb{G}_a$, par la relation $h(u^-u^+) = h(u^-)$. Ce morphisme ne dépend pas du $\nu$ dominant choisi. On en déduit un morphisme, noté encore $h : S_\nu \to \mathbb{G}_a$.

Fixons un caractère additif non trivial $\psi : k \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et notons $\mathcal{L}_\psi$ le faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbb{G}_a$ associé à $\psi$. Le caractère $\theta : U(F) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ considéré dans l'introduction est le caractère $x \mapsto \psi(h(x))$.

L'énoncé suivant a été conjecturé par Frenkel, Gaitsgory, Kazhdan et Vilonen [9].

**Théorème 3.2.** *Pour $\nu \neq \lambda$ dans $X_+^\vee$, le complexe $\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_\lambda \otimes h^*\mathcal{L}_\psi)$ est nul. Pour $\nu = \lambda$, ce complexe est isomorphe à $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, muni de l'action de Frobenius agissant par $q^{\langle \rho,\lambda\rangle}$, placé en degré $2\langle \rho, \lambda\rangle$.*

Ces résultats impliquent les énoncés sur les termes constants et les coefficients de Fourier mentionnés dans l'introduction via le dictionnaire faisceaux-fonctions de Grothendieck [12].

Nous exposerons les démonstrations de ces deux théorèmes en parallèle dans la suite de l'article.

## 4. L'action du tore $T$

Le tore $T$ normalise les sous-groupes $L^{\geq 0}G$, $L^{<0}G$, $L^{<\nu}U$ ... de $LG$ si bien qu'il agit sur tous les objets géométriques qu'on a considérés dans les deux sections précédentes. Cette action fournit un outil précieux pour étudier leur géométrie. Choisissons une fois pour toutes un cocaractère strictement dominant $\phi : \mathbb{G}_m \to T$. On entendra par l'action $\phi(\mathbb{G}_m)$, l'action restreinte de $T$ à $\mathbb{G}_m$ via ce cocaractère.

**Lemme 4.1.** *Pour tout $\nu \in X^\vee$, le point $e_\nu$ est le seul point fixe de l'action $\phi(\mathbb{G}_m)$ sur $S_\nu$. De plus, c'est un point fixe attractif.*

*Démonstration.* Tout $x \in L^{<\nu}U(\bar{k})$ est de la forme
$$x = \prod_{\alpha\in R_+} \prod_{i<\langle\alpha,\nu\rangle} U_{\alpha,i}(x_{\alpha,i}),$$
où les $x_{\alpha,i} \in \bar{k}$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. Alors, pour tout $z \in \bar{k}^\times$, on a
$$\phi(z)xe_\nu = \prod_{\alpha\in R^+} \prod_{i<\langle\alpha,\nu\rangle} U_{\alpha,i}(z^{\langle\alpha,\phi\rangle} x_{\alpha,i})e_\nu.$$
Le lemme résulte donc de l'hypothèse que pour tout $\alpha \in R_+$, l'entier $\langle \alpha, \phi\rangle$ est strictement positif. □

Ce lemme montre que les $e_\nu$ sont les seuls points fixes de l'action $\phi(\mathbb{G}_m)$ sur $\mathcal{Q}$. De plus, il entraîne l'énoncé suivant, qui précise [21, 2.6.11(3)] et est certainement bien connu.

**Lemme 4.2.** *Si l'intersection $S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ n'est pas vide, $\nu$ appartient à $\Omega(\lambda)$.*

*Démonstration.* Si un point $xe_\nu$, avec $x \in L^{<\nu}U(\bar{k})$, appartient à $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda(\bar{k})$, toute l'orbite de $\phi(\mathbb{G}_m)$ passant par ce point y appartient aussi. Puisque le point fixe $e_\nu$ appartient à l'adhérence de cette orbite et que $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ est propre, $e_\nu$ appartient à $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ d'où $\nu \in \Omega(\lambda)$. □

Signalons au passage l'énoncé suivant qui ne servira pas dans la suite de l'article. Cet énoncé a été découvert lors d'une conversation que l'un de nous a eu avec M. Rapoport.

**Proposition 4.3.** *La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_c(S_\nu \cap \mathcal{Q}_\lambda)$ est égale à 1 si $\nu$ est conjugué à $\lambda$ par un élément de $W$ et à 0 sinon.*

*Démonstration.* Dans le premier cas, $S_\nu \cap \mathcal{Q}_\lambda$ contient un unique point fixe $e_\nu$ de l'action $\phi(\mathbb{G}_m)$. Dans le second cas, le groupe multiplicatif $\phi(\mathbb{G}_m)$ agit sans point fixe. La proposition résulte donc d'un théorème de Bialynicki-Birula [4, cor. 2]. □

Cet énoncé peut être considéré comme une interprétation géométrique d'un résultat de Lusztig [19, 6.1]. Reprenons les notations de l'introduction. Soit $C_\lambda$ l'élément de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ défini par

$$C_\lambda = (-1)^{2\langle\rho,\lambda\rangle} q^{-\langle\rho,\lambda\rangle} \mathbb{I}_\lambda,$$

où $\mathbb{I}_\lambda$ est la fonction caractéristique de $K\varpi^\lambda K$. On sait que

$$(C_\lambda) = (K_{\lambda,\mu}(q))^{-1}(A_\lambda),$$

où $(K_{\lambda,\mu}(q))$ est la matrice triangulaire formée des polynômes de Kazhdan et Lusztig. Les termes constants normalisés

$$(-1)^{2\langle\rho,\nu\rangle} q^{-\langle\rho,\nu\rangle} \int_{U(F)} C_\lambda(x\varpi^\mu) dx$$

sont donc calculés par la matrice

$$(K_{\lambda,\mu}(q))^{-1}(m_\lambda(\mu))$$

d'après le théorème de Lusztig-Kato. Compte tenu de la proposition précédente (et aussi de 3.1), on obtient, en spécialisant $q \mapsto 1$,

$$(K_{\lambda,\mu}(1))^{-1}(m_\lambda(\mu)) = \mathrm{Id},$$

d'où $K_{\lambda,\mu}(1) = m_\lambda(\mu)$.

## 5. Les intersections $S_{w\lambda} \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$

Pour $\lambda \in X_+^\vee$, on a considéré dans la section 2 le groupe

$$J^\lambda = \prod_{\alpha \in R_+} \prod_{i=0}^{\langle \alpha, \lambda \rangle - 1} U_{\alpha,i}$$

qui est manifestement un sous-groupe de $L^{\geq 0}U$. On a aussi démontré que le morphisme $J^\lambda \to \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ défini par $j \mapsto je_\lambda$ est une immersion ouverte.

**Lemme 5.1.** *Soit $\lambda \in X_+^\vee$. Le morphisme $j \mapsto je_\lambda$ induit un isomorphisme de $J^\lambda$ sur l'ouvert $\varpi^\lambda L^{<0}Ge_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ de $\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$.*

*Démonstration.* L'image de $J^\lambda$ est contenue dans $\varpi^\lambda L^{<0}Ge_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$. D'après le lemme 2.2, elle est en fait un ouvert dense de $\varpi^\lambda L^{<0}Ge_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$. Par conséquent, $\varpi^{-\lambda}J^\lambda\varpi^\lambda$ est un ouvert dense dans l'image inverse de $\varpi^\lambda L^{<0}Ge_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ par l'isomorphisme

$$L^{<0}G \to \varpi^\lambda L^{<0}Ge_0.$$

Or, $\varpi^{-\lambda}J^\lambda\varpi^\lambda$ est un sous-groupe fermé de $L^{<0}G$ et le lemme s'en déduit. □

**Lemme 5.2.** *Soit $\lambda \in X_+^\vee$. Pour tout $w \in W$, le morphisme*

$$wJ^\lambda w^{-1} \cap LU \to S_{w\lambda} \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$$

*défini par $j \to je_{w\lambda}$ est un isomorphisme. Par conséquent, $S_{w\lambda} \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ est isomorphe à l'espace affine de dimension $\langle \rho, \lambda + w\lambda \rangle$.*

*Démonstration.* Pour $w = 1$, l'assertion résulte de manière évidente du lemme précédent, car on a les inclusions

$$J^\lambda e_\lambda \subset S_\lambda \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda \subset \varpi^\lambda L^{<0}Ge_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda.$$

Pour $w \in W$ quelconque, on peut raisonner comme suit. D'après le lemme précédent, le morphisme

$$wJ^\lambda w^{-1} \to \varpi^{w\lambda}L^{<0}Ge_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$$

défini par $j \mapsto je_{w\lambda}$ est un isomorphisme. Par ailleurs, la multiplication

$$(wJ^\lambda w^{-1} \cap LU) \times (wJ^\lambda w^{-1} \cap LU^-) \to wJ^\lambda w^{-1}$$

définit aussi un isomorphisme si bien que pour $x \in L^{<w\lambda}U$ tel que $x\varpi^{w\lambda} \in \bar{\mathcal{Q}}_\lambda$, $x$ doit s'écrire uniquement sous la forme $x = x_+x_-$ avec $x_+ \in wJ^\lambda w^{-1} \cap LU$ et $x_- \in wJ^\lambda w^{-1} \cap LU^-$. Or, l'intersection $LU \cap LU^-$ est réduite à l'élément neutre de sorte que la seule possibilité est $x = x_+$ et $x_- = 1$. Ceci prouve la première assertion.

De plus, la multiplication induit un isomorphisme

$$\prod_{\alpha\in R_+\cap w^{-1}R_+}\ \prod_{i=0}^{\langle\alpha,\lambda\rangle-1} U_{w\alpha,i} \xrightarrow{\cong} wJ^\lambda w^{-1}\cap LU. \qquad (*)$$

Compte-tenu de l'égalité

$$\sum_{\alpha\in R_+\cap w^{-1}R_+} \alpha = \rho + w^{-1}\rho,$$

on obtient la seconde assertion. □

On peut déduire de ce lemme l'énoncé 3.1 dans le cas $\nu = w\lambda$ ainsi que 3.2 dans le cas $\nu = \lambda$. En effet, l'inclusion évidente $wJ^\lambda w^{-1}\cap LU \subset L^{\geq 0}U$ implique que $S_{w\lambda}\cap\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ est contenue dans l'orbite ouverte $\mathcal{Q}_\lambda$. La restriction de $\mathcal{A}_\lambda$ à $S_{w\lambda}\cap\bar{\mathcal{Q}}_\lambda$ est donc égale à :

$$\mathcal{A}_\lambda|_{S_{w\lambda}\cap\bar{\mathcal{Q}}_\lambda} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\langle\rho,2\lambda\rangle](\langle\rho,\lambda\rangle).$$

L'énoncé 3.1 dans le cas $\nu = w\lambda$ s'ensuit.

L'inclusion $J^\lambda \subset L^{\geq 0}U$ implique par ailleurs que la restriction de $h$ à $J^\lambda$ est nulle. L'énoncé 3.2 dans le cas $\nu = \lambda$ s'ensuit donc aussi.

On aura besoin plus loin de l'énoncé plus général ci-dessous. Pour tout $\sigma \in X_+^\vee$, on note $h_\sigma : LU \to \mathbb{G}_a$ le morphisme $h_\sigma(x) = h(\varpi^\sigma x\varpi^{-\sigma})$ et aussi le morphisme $h_\sigma : S_\lambda \to \mathbb{G}_a$ qui s'en déduit. Du fait que $\sigma$ est dominant, la restriction de $h_\sigma$ à $L^{\geq 0}U$, et a fortiori à $J^\lambda$, est nulle. Le lemme suivant résulte donc également de la discussion précédente.

**Lemme 5.3.** *Pour tous $\lambda,\sigma \in X_+^\vee$, on a*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\lambda, \mathcal{A}_\lambda\otimes h_\sigma^*\mathcal{L}_\psi) = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[-2\langle\rho,\lambda\rangle](-\langle\rho,\lambda\rangle).$$

## 6. Minuscules

Nous utilisons les notations fixées dans la section 1. Soit $\mu$ un élément minimal, non nul, de $X_+^\vee$. D'après le lemme 1.1, $\mu$ est un copoids *minuscule*, et l'on a l'énoncé suivant, que nous rappelons ici pour la commodité du lecteur.

**Lemme 6.1.** *Soit $\mu$ minuscule. On a $\Omega(\mu) = W\mu$. Pour tout $\alpha\in R$, on a $\langle\alpha,\mu\rangle \in \{0,\pm 1\}$.*

Si $\mu$ est minuscule, sa minimalité implique que l'orbite $\mathcal{Q}_\mu$ est fermée. Puisque tout élément $\nu$ de $\Omega(\mu)$ est conjugué à $\mu$ par l'action de $W$ les énoncés 3.1 et 3.2 sont donc vérifiés pour $\lambda = \mu$ et $\nu\in\Omega(\mu)$.

On peut décrire explicitement la variété $\mathcal{Q}_\mu$ et les strates $S_{w\mu}\cap\mathcal{Q}_\mu$. On notera $P$ le sous-groupe de $G$ engendré par $T$ et les $U_\alpha$ avec $\langle\alpha,\mu\rangle \leq 0$; c'est un sous-groupe parabolique contenant $B^-$.

**Lemme 6.2.** *On a un isomorphisme canonique $\mathcal{Q}_\mu \to G/P$ via lequel $S_{w\mu} \cap \mathcal{Q}_\mu$ s'identifie à $UwP/P$.*

*Démonstration.* Compte tenu du lemme 2.3 et de la deuxième assertion du lemme 6.1, on sait que $L^{\geq 0}G \cap L^{\geq \mu}G$ est l'image inverse de $P$ par l'homomorphisme $L^{\geq 0}G \to G$. On en déduit l'isomorphisme

$$\mathcal{Q}_\mu = L^{\geq 0}G/(L^{\geq 0}G \cap L^{\geq \mu}G) \cong G/P.$$

Compte tenu, de nouveau, de la deuxième assertion du lemme 6.1, on sait que $J^\mu$ est égal à $U_\mu^+ = \prod_{\langle \alpha,\mu\rangle=1} U_\alpha$ qui est le radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé à $P$, et par conséquent

$$wJ^\mu w^{-1} \cap LU = wU_\mu^+ w^{-1} \cap U.$$

La seconde assertion du lemme se déduit alors du lemme 5.2. □

## 7. Quasi-minuscules : étude géométrique

Soit $\mu$ un copoids quasi-minuscule, c.à.d. un élément minimal de $X_+^\vee \setminus \{0\}$ minoré par 0. Rappelons que, d'après le lemme 1.1, on a l'énoncé suivant :

**Lemme 7.1.** *Soit $\mu$ quasi-minuscule. Alors $\mu$ est égal à la coracine $\gamma^\vee$ associée à une racine maximale $\gamma$. On a $\Omega(\mu) = W\mu \cup \{0\}$. Pour toute racine $\alpha \in R \setminus \{\pm\gamma\}$, on a $\langle \alpha, \mu\rangle \in \{0, \pm 1\}$.*

Puisque 0 est le seul cocaractère dominant qui minore $\mu$, $\bar{\mathcal{Q}}_\mu$ est la réunion de $\mathcal{Q}_\mu$ et du point base $e_0$.

Désignons encore par $P$ le sous-groupe parabolique de $G$ engendré par $T$ et par les sous-groupes radiciels $U_\alpha$ tels que $\langle \alpha, \gamma^\vee\rangle \leq 0$. Notons

$$V = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R\setminus\{\gamma\}} \mathfrak{g}_\alpha$$

où $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie de $T$ et où $\mathfrak{g}_\alpha$ est le sous-espace de poids $\alpha$ de $\mathfrak{g}$. D'après le lemme précédent, $V$ est la somme des espaces de poids $\nu$ dans $\mathfrak{g}$ tels que $\langle \gamma, \nu\rangle \leq 1$. Il résulte alors de la définition de $P$ que $V$ est $P$-stable.

Identifions $\mathfrak{g}_\gamma$ au quotient $\mathfrak{g}/V$ muni de sa structure de $P$-module. Considérons le fibré en droites

$$\mathbb{L}_\gamma = G \times^P \mathfrak{g}_\gamma$$

au-dessus de $G/P$.

**Lemme 7.2.** *L'orbite $\mathcal{Q}_\mu$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{L}_\gamma$.*

*Démonstration.* Par définition, le foncteur $R \mapsto G(R[\varpi]/(\varpi^2))$ est représenté par le fibré tangent $TG$ de $G$ qui est isomorphe au produit semi-direct $G \ltimes \mathfrak{g}$. Compte tenu du lemme 2.3 et de la dernière assertion du lemme 7.1, on sait que $L^{\geq 0}G \cap L^{\geq \mu}G$ est exactement l'image inverse de $P \ltimes V$ par l'homomorphisme canonique $L^{\geq 0}G \to G \ltimes \mathfrak{g}$.

Il en résulte l'isomorphisme

$$\mathcal{Q}_\mu \cong (G \ltimes \mathfrak{g})/(P \ltimes V) = G \times^P (\mathfrak{g}/V)$$

dont le terme de droite n'est autre que $\mathbb{L}_\gamma$. □

Le fibré $\mathbb{L}_\gamma$ se compactifie de façon naturelle en un fibré en droites projectives. En effet, on a

$$\mathbb{L}_\gamma \hookrightarrow \operatorname{Proj}(\mathbb{L}_\gamma \oplus \mathcal{O}_{G/P}) = \mathbb{P}_\gamma.$$

Soit $\mathbb{L}_{-\gamma} = G \times^P \mathfrak{g}_{-\gamma}$ le fibré dual. On a un isomorphisme naturel

$$\operatorname{Proj}(\mathbb{L}_\gamma \oplus \mathcal{O}_{G/P}) \cong \operatorname{Proj}(\mathcal{O}_{G/P} \oplus \mathbb{L}_{-\gamma}) = \mathbb{P}_{-\gamma},$$

si bien qu'on peut voir $\mathbb{P}_\gamma$ comme la réunion de $\mathbb{L}_\gamma$ et de $\mathbb{L}_{-\gamma}$. Notons $\phi_{\pm\gamma}$ le morphisme $\mathbb{L}_{\pm\gamma} \to G/P$ et $\epsilon_{\pm\gamma}$ la section nulle $G/P \to \mathbb{L}_{\pm\gamma}$. On a alors

$$\mathbb{P}_\gamma = \mathbb{L}_{\pm\gamma} \cup \epsilon_{\mp\gamma}(G/P).$$

**Lemme 7.3.** *L'isomorphisme $\mathbb{L}_\gamma \to \mathcal{Q}_\mu$ se prolonge en un morphisme*

$$\pi_\gamma : \mathbb{P}_\gamma \to \bar{\mathcal{Q}}_\mu$$

*qui envoie $\epsilon_{-\gamma}(G/P)$ sur le point $e_0$.*

*Démonstration.* Il s'agit d'un cas particulier du théorème principal de Zariski. Nous reproduisons l'argument classique pour la commodité du lecteur. Notons $\Gamma$ l'adhérence du graphe de l'isomorphisme $\mathbb{L}_\gamma \to \mathcal{Q}_\mu$ dans $\mathbb{P}_\gamma \times \bar{\mathcal{Q}}_\mu$. Puisque le complémentaire de $\mathcal{Q}_\mu$ dans $\bar{\mathcal{Q}}_\mu$ est constitué d'un seul point $e_0$, toutes les fibres de la projection $\Gamma \to \mathbb{P}_\gamma$ ne contiennent qu'un point. En particulier, cette projection est quasi-finie. Puisque de plus, elle est propre, elle est finie. Mais $\mathbb{P}_\gamma$ est lisse, en particulier normale, donc le morphisme fini, birationnel $\Gamma \to \mathbb{P}_\gamma$ doit être un isomorphisme. En inversant cet isomorphisme et en le composant avec l'autre projection $\Gamma \to \bar{\mathcal{Q}}_\mu$, on obtient le morphisme $\pi_\gamma : \mathbb{P}_\gamma \to \bar{\mathcal{Q}}_\mu$ voulu. □

Signalons que l'action de $L^{\geq 0}G$ sur $\mathcal{Q}_\mu$ se prolonge à $\mathbb{P}_\gamma$ et que la résolution $\pi_\gamma$ est équivariante par rapport à cette action. Nous n'utiliserons cette information que dans la remarque située après le corollaire 9.7, laquelle ne sert pas dans le reste de l'article.

On a la description explicite suivante des strates $S_{w\mu} \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu$.

**Lemme 7.4.** *Si $w\gamma \in R_+$ alors*

$$S_{w\mu} \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu = \phi_\gamma^{-1}(UwP/P).$$

*Si $w\gamma \in R_-$ alors*

$$S_{w\mu} \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu = \epsilon_\gamma(UwP/P).$$

*Démonstration.* D'après la formule $(*)$ établie dans la démonstration du lemme 5.2, l'on a:

$$wJ^\mu w^{-1} \cap LU = \prod_{\alpha \in R_+ \cap w^{-1}R_+} \prod_{i=0}^{\langle \alpha, \mu \rangle - 1} U_{w\alpha, i}.$$

De plus, comme $\langle \alpha, \mu \rangle \leq 1$ pour tout $\alpha \in R_+ \setminus \{\gamma\}$, d'après le lemme 7.1, on obtient que ce produit est égal à

$$U_{w\gamma,1} \prod_{\alpha \in R_+ \cap w^{-1}R_+} U_{w\alpha,0}$$

si $w\gamma \in R_+$, et à

$$\prod_{\alpha \in R_+ \cap w^{-1}R_+} U_{w\alpha,0}$$

sinon. Le lemme s'en déduit. □

On note $W_\gamma$ le stabilisateur de $\gamma$ dans $W$, et $\Delta_\gamma$ l'ensemble des racines simples conjuguées à $\gamma$.

**Corollaire 7.5.** *On a une stratification*

$$S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu = \{e_0\} \cup \bigcup_{\substack{w \in W/W_\gamma \\ w\gamma \in R_-}} \phi_\gamma^{-1}(UwP/P) \setminus \epsilon_\gamma(UwP/P).$$

*En particulier, les composantes irréductibles de $S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu$ sont en bijection avec $\Delta_\gamma$ et sont toutes de dimension $\langle \rho, \mu \rangle$.*

*On a aussi la stratification*

$$\pi_\gamma^{-1}(S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu) = \bigcup_{\substack{w \in W/W_\gamma \\ w\gamma \in R_-}} \phi_{-\gamma}^{-1}(UwP/P) \cup \bigcup_{\substack{w \in W/W_\gamma \\ w\gamma \in R_+}} \epsilon_{-\gamma}(UwP/P).$$

## 8. Quasi-minuscules : étude cohomologique

Les notations de la section précédente restent en vigueur. En particulier, $\mu = \gamma^\vee$ est quasi-minuscule. La résolution $\pi_\gamma : \mathbb{P}_\gamma \to \bar{\mathcal{Q}}_\mu$ permet de calculer la cohomologie d'intersection locale de $\mathcal{A}_\mu$ en le point singulier isolé $e_0$. L'énoncé suivant est dû à Kazhdan et Lusztig [16, Lemme 4.5]. En fait, dans notre situation les hypothèses sont un peu plus faibles, mais leur argument s'applique encore. Nous détaillons la démonstration pour la commodité du lecteur.

**Lemme 8.1.** *Soit $d = 2\langle\rho,\mu\rangle$ la dimension de $\bar{\mathcal{Q}}_\mu$. Pour $i \geq 0$, le groupe $\mathrm{H}^i(\mathcal{A}_\mu)_{e_0}$ est nul. Pour $i < 0$, on a une suite exacte courte*

$$0 \to \mathrm{H}^{i+d-2}(G/P)(d/2-1) \xrightarrow{\wedge c_{-\gamma}} \mathrm{H}^{i+d}(G/P)(d/2) \to \mathrm{H}^i(\mathcal{A}_\mu)_{e_0} \to 0,$$

*où $c_{-\gamma} \in H^2(X_\gamma)(1)$ est la classe de Chern de $\mathbb{L}_{-\gamma}$.*

*Démonstration.* Notons $\bar{\mathcal{Q}}'_\mu$ l'ouvert de $\bar{\mathcal{Q}}_\mu$

$$\bar{\mathcal{Q}}'_\mu = \bar{\mathcal{Q}}_\mu - \pi_\gamma \circ \epsilon_\gamma(G/P);$$

on a $\pi_\gamma^{-1}(\bar{\mathcal{Q}}'_\mu) = \mathbb{L}_{-\gamma}$. Notons $\mathcal{A}'_\mu$ la restriction de $\mathcal{A}_\mu$ à cet ouvert. Notons $\imath$ l'inclusion du point fermé $\imath : \{e_0\} \to \bar{\mathcal{Q}}'_\mu$. La flèche naturelle $\mathcal{A}'_\mu \to \imath_*\imath^*\mathcal{A}'_\mu$ induit le morphisme de restriction sur la cohomologie (sans support)

$$\imath^* : \mathrm{R}\Gamma(\bar{\mathcal{Q}}'_\mu, \mathcal{A}'_\mu) \to (\mathcal{A}'_\mu)_{e_0}.$$

On démontre d'abord que $\imath^*$ est un isomorphisme.

Pour cela, utilisons le théorème de décomposition de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber [1]. Puisque $\pi_\gamma : \mathbb{P}_\gamma \to \bar{\mathcal{Q}}_\mu$ est un isomorphisme en dehors de $e_0$, on a une décomposition

$$\mathrm{R}\pi_{\gamma,*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell[d](d/2) = \mathcal{A}_\mu \oplus \mathcal{C},$$

où $\mathcal{C}$ est un complexe supporté par le point $e_0$.

La section nulle $\epsilon_{-\gamma} : G/P \to \mathbb{L}_{-\gamma}$ définit le morphisme de restriction

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{L}_{-\gamma}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathrm{R}\Gamma(G/P, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

qui est un isomorphisme puisque $\mathbb{L}_{-\gamma}$ est un fibré en droites au-dessus de $G/P$. Or, ce morphisme est la somme directe du morphisme identité $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ avec le morphisme $\imath^* : \mathrm{R}\Gamma(\bar{\mathcal{Q}}'_\mu, \mathcal{A}'_\mu) \to (\mathcal{A}'_\mu)_{e_0}$. Ce dernier est donc lui aussi un isomorphisme.

Pour $i \geq 0$, l'annulation $\mathrm{H}^i(\mathcal{A}_\mu)_{e_0} = 0$ fait partie des propriétés qui caractérisent le complexe d'intersection $\mathcal{A}_\mu$. Cette annulation implique, via la suite exacte longue de cohomologie à support, que la flèche

$$\mathrm{H}_c^{i+d}(\mathbb{L}_\gamma^\times)(d/2) \to \mathrm{H}_c^i(\mathcal{Q}'_\mu, \mathcal{A}'_\mu)$$

est un isomorphisme dès que $i > 0$. Par dualité de Poincaré, la flèche

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{Q}'_\mu, \mathcal{A}'_\mu) \to \mathrm{H}^{i+d}(\mathbb{L}_\gamma^\times)(d/2)$$

est un isomorphisme pour $i < 0$. Dans la suite exacte longue de Wang

$$\to \mathrm{H}^{i+d-2}(G/P)(i/2-1) \xrightarrow{\wedge c_{-\gamma}} \mathrm{H}^{i+d}(G/P)(i/2) \to \mathrm{H}^{i+d}(\mathbb{L}_\gamma^\times)(i/2) \to$$

la flèche $\mathrm{H}^{i+d-2}(G/P)\xrightarrow{\wedge c_{-\gamma}}\mathrm{H}^{i+d}(G/P)$ est injective pour $i \leq 0$ d'après le théorème de Lefschetz difficile [7]. On en déduit les suites exactes courtes

$$0 \to \mathrm{H}^{i+d-2}(G/P)(-1)\xrightarrow{\wedge c_{-\gamma}}\mathrm{H}^{i+d}(G/P) \to \mathrm{H}^{i+d}(\mathbb{L}_\gamma^\times) \to 0$$

pour $i < 0$. Le lemme est démontré. □

**Corollaire 8.2.** *Soit $\mathcal{C}$ le facteur supporté par $e_0$ dans la décomposition*

$$\mathrm{R}\pi_{\gamma,*}\bar{\mathbb{Q}}_\ell[d](d/2) = \mathcal{A}_\mu \oplus \mathcal{C}.$$

*Pour $i < 0$, on a*

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{C}) = \mathrm{H}^{i+d-2}(G/P)(d/2-1).$$

*Pour $i \geq 0$, on a*

$$\mathrm{H}^i(\mathcal{C}) = \mathrm{H}^{i+d}(G/P)(d/2).$$

On peut maintenant démontrer l'énoncé 3.1 dans le cas où $\lambda$ est un cocaractère quasi-minuscule $\mu = \gamma^\vee$. Compte tenu de la discussion qui suit le lemme 5.2, il ne reste plus qu'à traiter le cas $\nu = 0$.

**Lemme 8.3.** *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_0, \mathcal{A}_\mu) \cong \bar{\mathbb{Q}}_\ell^{|\Delta_\gamma|}.$$

*Démonstration.* D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, on a

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\pi_\gamma^{-1}(S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu), \bar{\mathbb{Q}}_\ell)[d](d/2) = \mathrm{R}\Gamma_c(S_0, \mathcal{A}_\mu) \oplus \mathcal{C}.$$

Rappelons la stratification obtenue en 7.5

$$\pi_\gamma^{-1}(S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu) = \bigcup_{\substack{w\in W/W_\gamma \\ w\gamma\in R_-}} \phi_{-\gamma}^{-1}(UwP/P) \cup \bigcup_{\substack{w\in W/W_\gamma \\ w\gamma\in R_+}} \epsilon_{-\gamma}(UwP/P).$$

D'après le lemme 5.2, chaque strate $S_{w\mu} \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu$ est de dimension

$$\langle \rho, w\mu + \mu \rangle.$$

De plus, d'après le lemme 7.4, l'on a

$$S_{w\mu} \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu = \begin{cases} \phi_\gamma^{-1}(UwP/P) \text{ si } w\gamma \in R_+; \\ \epsilon_\gamma(UwP/P) \text{ si } w\gamma \in R_-. \end{cases}$$

On en déduit que si $w\gamma \in R_-$, alors la strate $\phi_{-\gamma}^{-1}(UwP/P)$ est un espace affine de dimension

$$\langle \rho, w\mu + \mu \rangle + 1.$$

On a, dans ce cas, l'inégalité $\dim(\phi_{-\gamma}^{-1}(UwP/P)) \leq d/2$ qui devient une égalité si et seulement si $w\gamma$ est l'opposé d'une racine simple.

D'autre part, si $w\gamma \in R_+$, alors la strate $\epsilon_{-\gamma}(UwP/P)$ est un espace affine de dimension

$$\langle \rho, w\mu + \mu \rangle - 1.$$

On a, dans ce cas, l'inégalité $\dim(\epsilon_{-\gamma}(UwP/P)) \geq d/2$ qui devient une égalité si et seulement si $w\gamma$ est une racine simple.

Pour $i < 0$, on a donc

$$\dim \mathrm{H}_c^{i+d}(\pi_\gamma^{-1}(S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu)) = \dim \mathrm{H}^i(\mathcal{C})$$

et ces deux nombres valent

$$|\{w \in W/W_\gamma \mid \langle \rho, w\mu + \mu \rangle = (i+d)/2 - 1\}|$$

Pour $i > 0$, on a aussi

$$\dim \mathrm{H}_c^{i+d}(\pi_\gamma^{-1}(S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu)) = \dim \mathrm{H}^i(\mathcal{C})$$

et ces deux nombres valent

$$|\{w \in W/W_\gamma \mid \langle \rho, w\mu + \mu \rangle = (i+d)/2 + 1\}|.$$

Pour $i = 0$, on a

$$\dim \mathrm{H}_c^{d}(\pi_\gamma^{-1}(S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu)) = 2\,|\Delta_\gamma|$$

et

$$\dim(\mathrm{H}^0(\mathcal{C})) = |\Delta_\gamma|.$$

Le lemme s'en déduit. □

Démontrons maintenant l'énoncé 3.2 dans le cas $\nu = 0$ et $\lambda = \mu$ quasi-minuscule. Nous démontrons en fait un énoncé un peu plus général. Rappelons que pour tout $\sigma \in X^\vee$, on a défini un morphisme $h_\sigma : S_0 \to \mathbb{G}_a$, voir 5.3.

**Lemme 8.4.** *Pour tout $\sigma \in X_+^\vee$, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_0, \mathcal{A}_\mu \otimes h_\sigma^* \mathcal{L}_\psi) = \bar{\mathbb{Q}}_\ell^{|\Delta_\gamma^\sigma|},$$

*où $\Delta_\gamma^\sigma$ est l'ensemble des $\alpha \in \Delta_\gamma$ telles que $\langle \alpha, \sigma \rangle > 0$.*

La démonstration de 8.4 suit le même schéma que celle du lemme 8.3 qui est, par ailleurs, un cas particulier de 8.4. Il suffit, en fait, de démontrer l'énoncé géométrique suivant.

**Lemme 8.5.**
1. *Les restrictions de $h_\sigma \circ \pi_\gamma$ aux strates $\epsilon_{-\gamma}(UwP/P)$ avec $w\gamma \in R_+$ sont nulles.*
2. *Les restrictions aux strates $\phi_{-\gamma}^{-1}(UwP/P)$ avec $w\gamma \in R_-$ sont nulles aussi, à l'exception des $\phi_{-\gamma}^{-1}(UwP/P)$ telles que $-w\gamma$ est une racine simple orthogonale à $\sigma$.*
3. *Les restrictions à ces dernières sont non nulles et linéaires par rapport à la structure restreinte du fibré en droites $\mathbb{L}_{-\gamma}$.*

*Démonstration.* La première assertion est évidente parce que toutes les strates $\epsilon_{-\gamma}(UwP/P)$ sont contenues dans $\pi_\gamma^{-1}(e_0)$. Pour les deux dernières assertions, il suffit naturellement de calculer les restrictions de $h_\sigma$ à

$$\phi_{-\gamma}^{-1}(UwP/P) \setminus \epsilon_{-\gamma}(UwP/P) = \phi_\gamma^{-1}(UwP/P) \setminus \epsilon_\gamma(UwP/P).$$

Pour tout $w \in W$, on a un isomorphisme

$$\phi_\gamma^{-1}(UwP/P) \setminus \epsilon_\gamma(UwP/P) = UwP/P \times \mathbb{G}_m$$

puisque tout point $y \in \phi_\gamma^{-1}(UwP/P) \setminus \epsilon_\gamma(UwP/P)$ s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$y = uwU_{\gamma,1}(x)\varpi^\mu e_0$$

avec $x \in \mathbb{G}_m$ et $u \in U \cap w^{-1}U_\gamma^+ w$, où $U_\gamma^+$ est le radical unipotent du parabolique (positif) opposé à $P$.

En faisant passer $w$ vers la droite, on obtient

$$uwU_{\gamma,1}(x)\varpi^\mu e_0 = uU_{w\gamma,1}(x)\varpi^{w\mu}e_0.$$

Posons $t = -\varpi x$ et $\alpha = w\gamma$ et récrivons le membre de droite avec ces nouvelles notations

$$uU_{w\gamma}(\varpi x)\varpi^{w\mu}e_0 = uU_\alpha(-t)t^{\alpha^\vee}e_0.$$

Rappelons la relation de Steinberg [29, chap. 3, lemme 19]

$$t^{\alpha^\vee}w_\alpha = U_\alpha(t)U_{-\alpha}(-t^{-1})U_\alpha(t)$$

qui vaut pour toute racine $\alpha$, pour tout $t$ inversible, et où le représentant $w_\alpha \in G$ est indépendant de $t$. On a donc

$$uU_\alpha(-t)t^{\alpha^\vee}e_0 = U_{-\alpha}(-t^{-1})U_\alpha(t)w_\alpha^{-1}e_0.$$

Or $U_\alpha(t)w_\alpha^{-1}e_0 = e_0$ si bien que

$$uU_\alpha(-t)t^{\alpha^\vee}e_0 = uU_{-\alpha,-1}(x^{-1})e_0.$$

Puisque $u \in U$, on a $h(u) = 0$ de sorte que

$$h(uU_{-\alpha,-1}(x^{-1})) = h(U_{-\alpha,-1}(x^{-1})).$$

Si $-\alpha$ n'est pas une racine simple, on a $h_\sigma(U_{-\alpha,-1}(x^{-1})) = 0$. Si $-\alpha \in \Delta$ mais $\langle -\alpha, \sigma\rangle > 0$, on a aussi $h_\sigma(U_{-\alpha,-1}(x^{-1})) = 0$. Dans le cas où $-\alpha \in \Delta$ est une racine simple orthogonale à $\sigma$, on a $h_\sigma(U_{-\alpha,-1}(x^{-1})) = x^{-1}$. $\square$

## 9. Convolution

Rappelons que $M$ est l'ensemble des éléments minimaux dans $X_+^\vee \setminus \{0\}$. Pour une suite $\mu_\bullet = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ d'éléments de $M$, on considère le sous-schéma projectif

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet} = \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_1} \tilde{\times} \cdots \tilde{\times} \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_n}$$

de $\mathcal{Q}^n$. La projection sur le dernier facteur de $\mathcal{Q}^n$ définit un morphisme propre

$$m_{\mu_\bullet} : \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet} \to \bar{\mathcal{Q}}_{|\mu_\bullet|},$$

où $|\mu_\bullet| = \mu_1 + \cdots + \mu_n$.

Soit $\nu_\bullet = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ une suite d'éléments de $X^\vee$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, posons $\sigma_i = \nu_1 + \cdots + \nu_i$. Notons $S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$ l'intersection

$$S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet} = S_{\sigma_1} \times \cdots \times S_{\sigma_n} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$$

dans $\mathcal{Q}^n$. Il est clair que les $S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$ forment une stratification de $\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$.

**Lemme 9.1.** *On a un isomorphisme canonique*

$$S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet} \cong (S_{\nu_1} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_1}) \times \cdots \times (S_{\nu_n} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_n}).$$

*Démonstration.* On montre facilement par récurrence que tout point

$$(y_1, \dots, y_n) \in S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$$

s'écrit de manière unique sous la forme

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1 \varpi^{\nu_1} e_0 \\ & \dots & \\ y_n & = & x_1 \varpi^{\nu_1} \dots x_n \varpi^{\nu_n} e_0 \end{array}$$

avec $x_i \in L^{<\nu_i} U$ tel que $x_i \varpi^{\nu_i} e_0 \in \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_i}$. Le lemme s'en déduit. □

Pour que la strate $S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$ soit non vide, il est donc nécessaire que, pour tout $i = 1, \dots, n$, $\nu_i$ appartienne à $\Omega(\mu_i)$.

**Corollaire 9.2.** *Soient $\mu_1, \dots, \mu_n$ des éléments de $M$. Pour toute suite $\nu_\bullet$ avec $\nu_i \in \Omega(\mu_i)$, toutes les composantes de $S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$ sont de dimension $\langle \rho, |\nu_\bullet| + |\mu_\bullet| \rangle$.*

*Démonstration.* D'après le lemme 5.2 et le corollaire 7.5, chaque $S_{\nu_i} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_i}$ est purement de dimension $\langle \rho, \nu_i + \mu_i \rangle$. Le corollaire découle donc du lemme précédent. □

En fait, pour $\lambda \in X_+^\vee$ et $\nu \in \Omega(\lambda)$ arbitraires, $S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_\mu$ est purement de dimension $\langle \rho, \nu + \mu \rangle$. Ce résultat est énoncé dans [22, 4.5] avec seulement quelques indications de démonstration. Nous avons pu en établir une autre démonstration, en utilisant l'approche en termes de représentations d'algèbres de Lie affines. Signalons aussi qu'on peut déduire cette formule de dimension, sans l'assertion de pure dimension, du théorème 3.1.

L'énoncé suivant est aussi un cas particulier d'un autre lemme énoncé dans [22, 2.6]. Nous proposons ici une démonstration un peu différente.

**Lemme 9.3.** *Pour tout $\lambda \in X_+^\vee$ avec $\lambda \leq |\mu_\bullet|$, on a*

$$\dim(m_{\mu_\bullet}^{-1}(\mathcal{Q}_\lambda)) \leq \langle \rho, \lambda + |\mu_\bullet| \rangle.$$

*Autrement dit, le morphisme $m_{\mu_\bullet}$ est semi-petit.*

*Démonstration.* Puisque $S_\mu \cap \mathcal{Q}_\mu$ est un ouvert dense de $\mathcal{Q}_\mu$, d'après 5.1 et 5.2, et puisque les fibres de $m_{\mu_\bullet}$ sont toutes isomorphes les unes aux autres au-dessus de l'orbite $\mathcal{Q}_\mu$, on a

$$\dim(m_{\mu_\bullet}^{-1}(\mathcal{Q}_\mu)) = \dim(m_{\mu_\bullet}^{-1}(S_\mu \cap \mathcal{Q}_\mu)).$$

Par conséquent, on a

$$\dim(m_{\mu_\bullet}^{-1}(\mathcal{Q}_\mu)) \leq \dim(m_{\mu_\bullet}^{-1}(S_\mu \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda)).$$

Or, on a une stratification

$$m_{\mu_\bullet}^{-1}(S_\mu \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda) = \bigcup_{|\nu_\bullet| = \lambda} S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet},$$

où toutes les strates sont de dimension $\langle \rho, \lambda + |\mu_\bullet| \rangle$, d'où le lemme. □

**Proposition 9.4.** *Le produit de convolution $\mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n}$ est un faisceau pervers. Il se décompose en somme directe*

$$\mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n} = \bigoplus_{\lambda \leq |\mu_\bullet|} \mathcal{A}_\lambda \otimes V_{\mu_\bullet}^\lambda,$$

*où les $V_{\mu_\bullet}^\lambda$ sont des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels dont la dimension vaut le nombre de composantes irréductibles de $m_{\mu_\bullet}^{-1}(S_\lambda \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet})$ qui sont entièrement contenues dans $m_{\mu_\bullet}^{-1}(S_\lambda \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda)$.*

*Démonstration.* Si les $\mu_i$ sont tous minuscules, le schéma source est lisse. Comme $m_{\mu_\bullet}$ est semi-petit, l'image directe $\mathrm{R}(m_{\mu_\bullet})_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\dim(\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet})]$ est perverse.

En général, on a la stratification du schéma source

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet} = \bigcup_{\mu'_i \leq \mu_i} \mathcal{Q}_{\mu'_1} \tilde{\times} \cdots \tilde{\times} \mathcal{Q}_{\mu'_n},$$

où, comme $\mu_i \in M$, chaque $\mu'_i$ est ou bien égal à $\mu_i$, ou bien égal à 0. Dans tous les cas, le lemme précédent s'applique encore à $\bar{\mathcal{Q}}_{\mu'_\bullet}$ et nous permet d'obtenir l'inégalité

$$\dim(m_{\mu_\bullet}^{-1}(\mathcal{Q}_\lambda) \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu'_\bullet}) \leq \langle \rho, \lambda + |\mu'_\bullet| \rangle$$

pour tout $\lambda \leq |\mu'_\bullet|$.

Par ailleurs, $\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$ muni de la stratification par les $\mathcal{Q}_{\mu'_1} \tilde{\times} \cdots \tilde{\times} \mathcal{Q}_{\mu'_n}$, est localement isomorphe à $\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_1} \times \cdots \times \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_1}$ muni de la stratification par les $\mathcal{Q}_{\mu'_1} \times \cdots \times \mathcal{Q}_{\mu'_n}$, voir la section 2. Par conséquent, pour $\mu'_\bullet < \mu_\bullet$,

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{IC}(\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet})|_{\mathcal{Q}_{\mu'_1} \tilde{\times} \cdots \tilde{\times} \mathcal{Q}_{\mu'_n}})$$

s'annule dès que $i \geq -2\langle \rho, |\mu'_\bullet| \rangle$.

Il résulte de ces deux dernières assertions que $\mathrm{R}(m_{\mu_\bullet})_* \mathrm{IC}(\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet})$ est un faisceau pervers. Sa décomposition [1], a priori sur $\bar{k}$, doit avoir la forme

$$\mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n} = \bigoplus_{\lambda \leq |\mu_\bullet|} \mathcal{A}_\lambda \otimes V^\lambda_{\mu_\bullet}$$

où les $V^\lambda_{\mu_\bullet}$ sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, parce que tous ses facteurs directs sont aussi $L^{\geq 0}G$-équivariants.

Les espaces vectoriels $V^\lambda_{\mu_\bullet}$ admettent une base canonique indexée par les composantes irréductibles de $m^{-1}_{\mu_\bullet}(\mathcal{Q}_\lambda)$ de dimension exactement $\langle \rho, |\mu_\bullet| - \lambda \rangle$. D'après la démonstration du lemme 9.3, celles-ci correspondent bijectivement aux composantes irréductibles de $m^{-1}_{\mu_\bullet}(S_\lambda \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet})$ qui sont entièrement contenues dans $m^{-1}_{\mu_\bullet}(S_\lambda \cap \bar{\mathcal{Q}}_\lambda)$.

Puisque ces composantes sont toutes définies sur $k$, la décomposition est en fait valable sur $k$. □

Soit $\mu_\bullet$ comme précédemment, c.à.d. $\mu_\bullet$ est une suite $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ d'éléments de $M$. A la suite de Littelmann [18], on appellera $\mu_\bullet$-*chemin* une donnée combinatoire $\chi$ du type suivant

- une suite de sommets $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ dans $X^\vee$ tels que pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\nu_i = \sigma_i - \sigma_{i-1} \in \Omega(\mu_i)$ ;
- des applications

  $$p_i : [0,1] \to X^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

  vérifiant
  – si $\sigma_{i-1} \neq \sigma_i$, alors

  $$p_i(t) = (1-t)\sigma_{i-1} + t\sigma_i$$

  – si $\sigma_{i-1} = \sigma_i$, alors

  $$p_i(t) = \begin{cases} \sigma_{i-1} - t\alpha_i^\vee & \text{pour } \ 0 \leq t \leq 1/2, \\ \sigma_{i-1} + (t-1)\alpha_i^\vee & \text{pour } \ 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

  où $\alpha_i^\vee$ est une coracine simple conjuguée à $\mu_i$.

En mettant bout à bout les images des $p_i$, on obtient un chemin dans $X^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ allant de 0 à $\sigma_n$. Le $\mu_\bullet$-chemin $\chi$ est dit *dominant* s'il est entièrement contenu dans la chambre dominante $(X^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})_+$.

D'après le lemme 5.2, chaque $S_{w\mu_i} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_i}$ est irréductible. De plus, d'après le corollaire 7.5, si $\mu_i$ est quasi-minuscule, disons $\mu_i = \gamma_i^\vee$, et si $\nu = 0$, alors l'ensemble des composantes irréductibles de $S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_i}$ est en bijection canonique avec l'ensemble $\Delta_\gamma$ des racines simples $\alpha$ conjuguées à $\gamma$. Compte tenu du lemme 9.1, pour tout $\nu \in \Omega(|\mu_\bullet|)$, l'ensemble des composantes irréductibles de $\pi^{-1}(S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_{|\mu_\bullet|})$ est en bijection canonique avec l'ensemble des $\mu_\bullet$-chemins $\chi$ allant de 0 à $\nu$. Notons $C_\chi$ la composante correspondante à $\chi$.

**Lemme 9.5.** *Soient $\nu \in \Omega(|\mu_\bullet|)$ dominant et $\chi$ un $\mu_\bullet$-chemin dominant allant de 0 à $\nu$. Alors la composante $C_\chi$ est contenue dans $\pi^{-1}(S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_\nu)$.*

*Démonstration.* Notons $I(\chi)$ l'ensemble des indices $i = 1, \ldots, n$ tels que $\sigma_{i-1} = \sigma_i$.

Si $i \notin I(\chi)$, $\nu_i$ est non nul et est donc conjugué à $\mu_i$. D'après le lemme 5.2, un point $p_i \in S_{\nu_i} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_i}$ s'écrit de manière unique sous la forme $p_i = u_i \varpi^{\nu_i} e_0$ avec $u_i \in wJ^{\mu_i}w^{-1} \cap LU$. En particulier, $u_i \in L^{\geq 0}U$.

Si $i \in I(\chi)$, alors $\mu_i$ est quasi-minuscule, disons $\mu_i = \gamma_i^\vee$, et l'hypothèse $\chi$ dominant implique $\langle \alpha_i, \sigma_{i-1}\rangle \geq 1$. D'après le corollaire 7.5, la composante irréductible de $S_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\gamma_i^\vee}$ correspondant à $\alpha_i = w_i\gamma_i$, contient comme ouvert dense le $\mathbb{G}_m$-torseur trivial

$$\phi_{\gamma_i}^{-1}(Uw_iP_i/P_i) \setminus \epsilon_{\gamma_i}^{-1}(Uw_iP_i/P_i)$$

au-dessus de $Uw_iP_i/P_i$. D'après la démonstration du lemme 8.5, pour $i \in I(\chi)$ chaque point

$$p_i \in \phi_{\gamma_i}^{-1}(Uw_iP_i/P_i) \setminus \epsilon_{\gamma_i}^{-1}(Uw_iP_i/P_i)$$

s'écrit de manière unique sous la forme $uU_{\alpha_i,-1}(x)e_0$ avec $u \in U \cap w^{-1}U_{\gamma_i}^+ w$ et $x \in \mathbb{G}_m$. Ici, $U_{\gamma_i}^+$ est le radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé à $P_i$. Posons $u_i = uU_{\alpha_i,-1}(x)$.

Dans ce cas, $u_i \notin L^{<0}U$. Toutefois, l'unicité de l'expression $p_i = u_ie_0$ suffit pour l'argument donné dans la démonstration du lemme 9.1. Le morphisme qui envoie le point

$$(p_1, \ldots, p_n) \in \prod_{i \notin I(\chi)} (S_{\nu_i} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_i}) \prod_{i \in I(\chi)} (\phi_{\gamma_i}^{-1}(Uw_iP_i/P_i) \setminus \epsilon_{\gamma_i}^{-1}(Uw_iP_i/P_i)),$$

sur le point

$$(y_1, \ldots, y_n) \in S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$$

défini par

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & u_1\varpi^{\nu_1}e_0 \\ & \dots & \\ y_n & = & u_1\varpi^{\nu_1}u_2\varpi^{\nu_2}\dots u_n\varpi^{\nu_n}e_0. \end{array}$$

induit un isomorphisme du schéma source sur un ouvert dense de $C_\chi$.

Pour $i\notin I(\chi)$, on a $u_i\in L^{\geq 0}U$ de sorte que $\varpi^{\sigma_{i-1}}u_i\varpi^{-\sigma_{i-1}}$ appartient aussi à $L^{\geq 0}U$ vu que $\sigma_{i-1}$ est dominant.

Pour $i\in I(\chi)$, on a $u_i=uU_{\alpha_i,-1}(x)$ et par conséquent,

$$\varpi^{\sigma_{i-1}}u_i\varpi^{-\sigma_{i-1}}=\varpi^{\sigma_{i-1}}u\varpi^{-\sigma_{i-1}}U_{\alpha_i,\langle\alpha_i,\sigma_{i-1}\rangle-1}(x).$$

Cet élément appartient aussi à $L^{\geq 0}U$ parce que $\langle\alpha_i,\sigma_{i-1}\rangle\geq 1$.

Il s'ensuit que $y_n\in S_\nu\cap\bar{\mathcal{Q}}_\nu$ de sorte qu'on a un ouvert dense de $C_\chi$ contenu dans $m_{\mu_\bullet}^{-1}(S_\nu\cap\bar{\mathcal{Q}}_\nu)$. Or, $S_\nu\cap\bar{\mathcal{Q}}_\nu$ est fermé dans $S_\nu\cap\bar{\mathcal{Q}}_{|\mu_\bullet|}$ si bien que la composante $C_\chi$ toute entière est contenue dans $m_{\mu_\bullet}^{-1}(S_\nu\cap\bar{\mathcal{Q}}_\nu)$. □

Il n'est pas difficile de démontrer qu'inversement, si le $\mu_\bullet$-chemin $\chi$ n'est pas dominant, alors $C_\chi\not\subset\pi^{-1}(S_\nu\cap\mathcal{Q}_\nu)$. Nous laissons cette assertion aux soins du lecteur car elle n'est pas logiquement nécessaire pour la suite. Il nous suffira seulement de savoir que la multiplicité $\dim(V^\nu_{|\mu_\bullet|})$ de $\mathcal{A}_\nu$ dans $\mathcal{A}_{\mu_1}*\cdots*\mathcal{A}_{\mu_n}$ vaut, au moins, le nombre de $\mu_\bullet$-chemins dominants allant de 0 à $\nu$.

**Proposition 9.6.** *Pour tout $\lambda\in X_+^\vee$, $\mathcal{A}_\lambda$ est facteur direct d'un produit de convolution de la forme*

$$\mathcal{A}_{\mu_1}*\cdots*\mathcal{A}_{\mu_n},$$

*avec $\mu_1,\dots,\mu_n\in M$.*

Compte tenu de 9.4 et de 9.5, il suffit de démontrer qu'il existe un $\mu_\bullet$-chemin dominant allant de 0 à $\nu$. On démontrera cet énoncé combinatoire dans la section 10.

Signalons le corollaire suivant dont on ne se servira pas dans la suite de l'article. Cet énoncé se trouve déjà dans [11] et [22].

**Corollaire 9.7.** *Pour tous $\lambda,\lambda'\in X_+^\vee$, le produit de convolution $\mathcal{A}_\lambda*\mathcal{A}_{\lambda'}$ est un faisceau pervers.*

*Démonstration.* Si $\mathcal{A}_\lambda$, resp. $\mathcal{A}_{\lambda'}$, est un facteur direct de $\mathcal{A}_{\mu_1}*\cdots*\mathcal{A}_{\mu_n}$, resp. de $\mathcal{A}_{\mu'_1}*\cdots*\mathcal{A}_{\mu'_{n'}}$, alors $\mathcal{A}_\lambda*\mathcal{A}_{\lambda'}$ est un facteur direct de

$$\mathcal{A}_{\mu_1}*\cdots*\mathcal{A}_{\mu_n}*\mathcal{A}_{\mu'_1}*\cdots*\mathcal{A}_{\mu'_{n'}},$$

qui est pervers d'après 9.4. □

Cette technique permet aussi de généralier la démonstration de [24, cor. 4.3.2] à tout groupe réductif. Cet énoncé a été démontré auparavant par Ginzburg, Mirkovic et Vilonen [11], [22] du moins lorsque le corps $k$ est le corps des nombres complexes.

## 10. Combinatoire

Nous proposons deux démonstrations de 9.6. L'une repose sur un lemme sur les systèmes de racines, qui paraît intéressant en soi. L'autre est basée sur la théorie des représentations et le modèle des chemins de Littelmann ; elle présente des similitudes remarquables avec des résultats géométriques des sections 8 et 9, et de cette manière, est une bonne illustration de l'équivalence tannakienne de [11] et [22].

*Preuve combinatoire.* Rappelons que $M$ désigne l'ensemble des cocaractères minuscules et quasi-minuscules. Si $\mu = \gamma^\vee$ est quasi-minuscule, $\Delta_\gamma$ désigne l'ensemble des racines simples conjuguées à $\gamma$.

Compte tenu de 9.4 et 9.5, la proposition 9.6 découle de l'énoncé suivant.

**Lemme 10.1.** *Soit $\lambda \in X^\vee_+$. Si $\lambda \notin M$, il existe une coracine courte $\beta^\vee$ telle que $\lambda - \beta^\vee \in X^\vee_+$.*

*Démonstration.* Comme $\lambda \notin M$, il résulte du lemme 1.1 qu'il existe une racine $\alpha$ telle que $\langle \alpha, \lambda \rangle \geq 2$. Comme $\lambda$ est dominant, ceci entraîne que $\langle \beta, \lambda \rangle \geq 2$, où $\beta$ est la racine maximale (longue!) du sous-système de racines irréductible de $R$ contenant $\alpha$. On observe que $\lambda - \beta^\vee$ est un poids de $V(\lambda)$, donc appartient à $\Omega(\lambda)$.

Soit $(\ ,\ )$ un produit scalaire $W$-invariant sur $X^\vee \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, normalisé par la condition que $(\alpha^\vee, \alpha^\vee) = 2$ pour toute coracine courte $\alpha^\vee$. Pour tout $\chi \in X^\vee$, on posera $|\chi|^2 := (\chi, \chi)$.

Alors, un calcul facile montre que $|\lambda - i\beta^\vee| < |\lambda|$ pour $0 < i < \langle \beta, \lambda \rangle$. Par conséquent, comme $\langle \beta, \lambda \rangle \geq 2$, on obtient que $\lambda - \beta^\vee$ n'appartient pas à $W\lambda$. Notons $\lambda'$ le cocaractère dominant conjugué à $\lambda - \beta^\vee$, il appartient aussi à $\Omega(\lambda)$. On a ainsi

$$\lambda - \beta^\vee \leq \lambda' < \lambda,$$

et donc $\lambda' = \lambda - \eta$ et $\beta^\vee = \eta + \nu$, avec $\eta, \nu \in Q^\vee_+$ et $\eta \neq 0$.

Alors, pour tout $\alpha \in R$, on a

$$(\lambda, \alpha^\vee) = \langle \alpha, \lambda \rangle (\alpha^\vee, \alpha^\vee)/2.$$

et par conséquent, $(\lambda, \delta) \geq 0$ pour tout $\delta \in Q^\vee_+$.

Alors, de l'égalité

$$|\lambda - \beta^\vee|^2 = |\lambda - \eta|^2,$$

on déduit que

$$|\beta^\vee|^2 - |\eta|^2 = 2(\lambda, \nu) \geq 0,$$

d'où $|\eta|^2 \leq |\beta^\vee|^2 = 2$. Ceci entraîne que $\eta$ est une coracine courte, et le lemme est démontré. □

*Preuve basée sur la théorie des représentations.* Voici un cas très particulier et bien connu de la règle de Littlewood-Richardson, voir [18] pour le cas général. On rappelle que, pour $\lambda \in X_+^\vee$, $V(\lambda)$ désigne le module simple de plus haut poids $\lambda$ pour le groupe $G^\vee$ défini sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

**Lemme 10.2.** *Soient $\mu \in M$ et $\lambda \in X_+^\vee$.*

1. *Si $\mu$ est minuscule, alors*

$$V(\mu) \otimes V(\lambda) = \bigoplus_{\substack{\nu \in W\mu \\ \nu+\lambda \in X_+^\vee}} V(\lambda + \nu).$$

2. *Si $\mu$ est quasi-minuscule, alors*

$$V(\mu) \otimes V(\lambda) = \bigoplus_{\substack{\nu \in W\mu \\ \nu+\lambda \in X_+^\vee}} V(\lambda + \nu) \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta_\gamma \\ \lambda+\frac{1}{2}\alpha^\vee \in X_+^\vee}} V(\lambda).$$

*Démonstration.* Ceci est bien connu, voir par exemple [14, Lemma 5A.9] ou [8, 4.2.1] pour le point 1) et [25, 3.7-3.8] pour le point 2).

En utilisant le modèle des chemins de Littelmann [18], on peut aussi argumenter comme suit. D'après *loc. cit.*, le $G^\vee$-module $V(\lambda)$ admet une base paramétrée par certains chemins. En particulier, pour $\mu$ minuscule, $V(\mu)$ admet une base $\{v_{p_{w\mu}}\}_{w \in W/W_\mu}$ où $p_{w\mu}$ est le chemin défini par

$$p_{w\mu}(t) = t\, w\mu, \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq t \leq 1;$$

le poids de $v_{p_{w\mu}}$ étant $p_{w\mu}(1) = w\mu$.

Pour $\mu = \gamma^\vee$ quasi-minuscule, $V(\mu)$ admet une base

$$\{v_{p_{w\mu}}\}_{w \in W/W_\mu} \cup \{v_{p_\alpha}\}_{\alpha \in \Delta_\gamma},$$

où pour toute racine simple $\alpha \in \Delta_\gamma$, $p_\alpha$ est le chemin

$$p_\alpha(t) = \begin{cases} -t\alpha^\vee & \text{pour tout} \quad 0 \leq t \leq 1/2; \\ (t-1)\alpha^\vee & \text{pour tout} \quad 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

le poids de $v_{p_\alpha}$ étant $p_\alpha(1) = 0$.

D'après *loc. cit.*, $V(\mu) \otimes V(\lambda)$ est la somme directe des $V(\lambda + \chi(1))$, où $\chi$ parcourt l'ensemble des chemins dans $V(\mu)$ tels que le translaté $\lambda + \chi([0,1])$ soit entièrement contenu dans la chambre dominante. Pour les chemins $p_{w\mu}$, cela équivaut à la condition $\lambda + w\mu \in X_+^\vee$. Pour les chemins $p_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_\gamma$, cela équivaut à la condition $\lambda + \frac{1}{2}\alpha^\vee \in X_+^\vee$. $\square$

Il résulte de ce lemme que $V(\lambda)$ est un facteur direct d'un produit tensoriel $V(\mu_1) \otimes \cdots \otimes V(\mu_n)$ si et seulement s'il existe un $\mu_\bullet$-chemin dominant allant de 0 à $\lambda$. Il suffit donc de démontrer le lemme suivant.

**Lemme 10.3.** *Pour tout $\lambda \in X_+^\vee$, $V(\lambda)$ est facteur direct d'un produit tensoriel de la forme $V(\mu_1) \otimes \cdots \otimes V(\mu_n)$ avec $\mu_1, \dots \mu_n \in M$.*

*Démonstration.* Démontrons d'abord que la représentation

$$\rho_M : G \to \prod_{\mu \in M} \mathrm{End}\, V(\mu)$$

est fidèle. D'abord, il est bien connu, et facile de voir, que pour tout $\xi \in X_+^\vee$, le sous-groupe de $X^\vee = \mathrm{Hom}(T^\vee, \mathbb{G}_m)$ engendré par les poids de $V(\xi)$ est le sous-groupe engendré par $Q^\vee$ et $\xi$. D'autre part, on déduit de [3, Chap.VI, Ex.2.5], que $M$ contient un système de représentants de $X^\vee/Q^\vee$. Il en résulte que la restriction de $\rho_M$ au tore maximal $T^\vee$ est fidèle, et donc que $\rho_M$ est fidèle.

On en déduit que l'homomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{Sym}(\bigoplus_{\mu \in M} V(\mu) \otimes V(\mu)^*) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell[G^\vee],$$

où $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[G^\vee]$ désigne l'algèbre des fonctions régulières sur $G^\vee$, est surjectif. D'après le théorème de Peter-Weyl, tout module $V(\lambda)$ intervient comme facteur direct de l'algèbre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[G^\vee]$, d'où le lemme. $\square$

## 11. Fin des démonstrations

On conserve les notations de la section 9. En particulier, soient $\lambda \in X_+^\vee$, $\nu \in \Omega(\lambda)$ et $\mu_\bullet = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ une suite d'éléments de $M$ telle que $\mathcal{A}_\lambda$ soit un facteur direct de $\mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n}$ (*c.f.* Proposition 9.6).

*Preuve du théorème 3.1.* Compte-tenu des hypothèses ci-dessus, pour démontrer 3.1, il suffit de démontrer que le complexe

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n})$$

est concentré en degré $2\langle \rho, \nu \rangle$ et que l'endomorphisme de Frobenius $\mathrm{Fr}_q$ agit dans $\mathrm{H}_c^{2\langle \rho, \nu \rangle}(S_\nu, \mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n})$ comme la multiplication par $q^{\langle \rho, \nu \rangle}$. D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, on a

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n}) = \mathrm{R}\Gamma_c(m_{\mu_\bullet}^{-1}(S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_{|\mu_\bullet|}), \mathrm{IC}(\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet})).$$

Rappelons qu'on a la stratification

$$m_{\mu_\bullet}^{-1}(S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_{|\mu_\bullet|}) = \bigcup_{|\nu_\bullet|=\nu} S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$$

et, d'après le lemme 9.1, on a un isomorphisme

$$S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet} \cong (S_{\nu_1} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_1}) \times \cdots \times (S_{\nu_n} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_n}),$$

où $\nu_\bullet = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$. De plus, cet isomorphisme est induit par l'isomorphisme provenant de la locale trivialité

$$\begin{array}{c}(\varpi^{\nu_1} L^{<0} G e_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_1}) \times \cdots \times (\varpi^{\nu_n} L^{<0} G e_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_n}) \\ \cong (\varpi^{\nu_1} L^{<0} G e_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_1}) \tilde{\times} \cdots \tilde{\times} (\varpi^{\nu_n} L^{<0} G e_0 \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_n})\end{array}$$

si bien qu'on a

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}, \mathrm{IC}(\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet})) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathrm{R}\Gamma_c(S_{\nu_i} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_i}, \mathcal{A}_{\mu_i}).$$

L'assertion à démontrer résulte maintenant de 5.2 et de 8.4. □

*Preuve du théorème 3.2.* Rappelons que le cas plus facile $\nu = \lambda$ a été démontré dans la discussion qui suit le lemme 5.2. On démontre maintenant le cas plus difficile $\nu \neq \lambda$.

La suite $\mu_\bullet$ a été choisie de sorte que la multiplicité $V_{\mu_\bullet}^\lambda$ de $\mathcal{A}_\lambda$ dans la décomposition 9.4 :

$$\mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n} = \bigoplus_{\substack{\xi \in X_+^\vee \\ \xi \leq \mu_1 + \cdots + \mu_n}} \mathcal{A}_\xi \otimes V_{\mu_\bullet}^\xi$$

est non nulle. On déduit de cette décomposition l'égalité

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n} \otimes h^* \mathcal{L}_\psi) \\ = & \displaystyle\bigoplus_{\substack{\xi \in X_+^\vee \\ \xi \leq \mu_1 + \cdots + \mu_n}} \mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_\xi \otimes h^* \mathcal{L}_\psi) \otimes V_{\mu_\bullet}^\xi .\end{array}$$

Du fait que $V_{\mu_\bullet}^\lambda \neq 0$ et que $\lambda \neq \nu$, pour démontrer que

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_\lambda \otimes h^* \mathcal{L}_\psi) = 0$$

il suffit de démontrer que la flèche facteur direct

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_\nu \otimes h^* \mathcal{L}_\psi) \otimes V_{\mu_\bullet}^\nu \\ \rightarrow & \mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n} \otimes h^* \mathcal{L}_\psi)\end{array}$$

est un quasi-isomorphisme.

Or, d'après la discussion qui suit le lemme 5.2, on sait que

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_\nu \otimes h^* \mathcal{L}_\psi) \otimes V_{\mu_\bullet}^\nu = V_{\mu_\bullet}^\nu [-2\langle \rho, \nu \rangle](-\langle \rho, \nu \rangle).$$

Il suffit par conséquent de démontrer que pour $i \neq 2\langle \rho, \nu\rangle$, on a

$$\mathrm{H}^i_c(S_\nu, \mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n} \otimes h^*\mathcal{L}_\psi) = 0$$

et que pour $i = 2\langle \rho, \nu\rangle$, on a

$$\dim(V^\nu_{\mu_\bullet}) \geq \dim(H^i_c(S_\nu, \mathcal{A}_{\mu_1} * \cdots * \mathcal{A}_{\mu_n} \otimes h^*\mathcal{L}_\psi)).$$

Rappelons qu'on a la stratification

$$m^{-1}_{\mu_\bullet}(S_\nu \cap \bar{\mathcal{Q}}_{|\mu_\bullet|}) = \bigcup_{|\nu_\bullet| = \nu} S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$$

et que chaque point

$$(y_1, \ldots, y_n) \in S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}$$

s'écrit de manière unique sous la forme

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1 \varpi^{\nu_1} e_0 \\ & \ldots & \\ y_n & = & x_1 \varpi^{\nu_1} \ldots x_n \varpi^{\nu_n} e_0 \end{array}$$

avec $x_i \in L^{<\nu_i}U$ tels que $x_i \varpi^{\nu_i} e_0 \in \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_i}$. Pour $\sigma \in X^\vee$, notons $h_\sigma : LU \to \mathbb{G}_a$ le morphisme défini par $h_\sigma(x) = h(\varpi^\sigma x \varpi^{-\sigma})$ ainsi que ses restriction aux $L^{<\nu}U$ et $S_\nu$. Il est clair que

$$h(y_n) = h(x_1) + h_{\sigma_1}(x_2) + \cdots + h_{\sigma_{n-1}}(x_n).$$

Joint à l'argument de locale trivialité déjà utilisé dans la preuve de 3.1, on obtient l'égalité

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{R}\Gamma_c((S_{\nu_\bullet} \cap \mathcal{Q}_{\mu_\bullet}), \mathrm{IC}(\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}) \otimes h^*\mathcal{L}_\psi) \\ = & \bigotimes_{i=1}^n \mathrm{R}\Gamma_c((S_{\nu_i} \cap \mathcal{Q}_{\mu_i}), \mathcal{A}_{\mu_i} \otimes h^*_{\sigma_{i-1}}\mathcal{L}_\psi). \end{array}$$

**Lemme 11.1.** *Si $\sigma \notin X^\vee_+$, alors on a*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\nu, \mathcal{A}_\lambda \otimes h^*_\sigma \mathcal{L}_\psi) = 0.$$

*Démonstration.* Soit $\alpha \in \Delta$ une racine simple telle que $\langle \alpha, \sigma\rangle$ soit strictement négatif. Le sous-groupe $\mathbb{G}_a = U_{\alpha, -\langle\alpha,\sigma\rangle - 1}$ est alors contenu dans $L^{\geq 0}U$, donc agit de manière équivariante sur le couple $(S_\nu, \mathcal{A}_\lambda)$. Or, la restriction de $h_\sigma$ à ce sous-groupe induit l'identité de $\mathbb{G}_a$. Il suffit maintenant d'appliquer [23, lemme 3.3]. □

On en déduit l'annulation

$$\mathrm{R}\Gamma_c((S_{\nu_\bullet} \cap \mathcal{Q}_{\mu_\bullet}), \mathrm{IC}(\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}) \otimes h^*\mathcal{L}_\psi) = 0$$

pour les suites $\nu_\bullet$ dont au moins une des sommes partielles $\sigma_i$ n'est pas dominante.

Soit maintenant $\nu_\bullet$ une suite avec $\nu_i \in \Omega(\mu_i)$ telle que toutes les sommes partielles $\sigma_i = \nu_1 + \cdots + \nu_i$ sont dominantes. On dira qu'un

$\mu_\bullet$-chemin est de type $\nu_\bullet$ s'il a pour sommets $0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Observons que la condition $\langle \alpha, \sigma \rangle \geq 1$ apparaissant dans le lemme 8.4 équivaut à la condition que $\alpha^\vee/2 + \sigma$ soit dominant.

En mettant ensemble les lemmes 5.3 et 8.4, on arrive à l'assertion suivante. Pour $i \neq 2\langle \rho, \nu \rangle$, on a

$$\mathrm{H}_c^i(S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}, \mathrm{IC}(\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}) \otimes h^*\mathcal{L}_\psi) = 0$$

et pour $i = 2\langle \rho, \nu \rangle$, on a

$$\begin{aligned} & \dim(\mathrm{H}_c^i(S_{\nu_\bullet} \cap \bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}, \mathrm{IC}(\bar{\mathcal{Q}}_{\mu_\bullet}) \otimes h^*\mathcal{L}_\psi)) \\ = \ & |\{\mu_\bullet\text{-chemins dominants de type } \nu_\bullet\}|. \end{aligned}$$

Par ailleurs, compte tenu de 9.4 et de 9.5, on a l'inégalité

$$\dim(V_{\mu_\bullet}^\nu) \geq |\{\mu_\bullet\text{-chemins dominants allant de } 0 \text{ à } \nu\}|.$$

La démonstration du théorème 3.2 est terminée. $\square$

## Références


[1] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne. Faisceaux pervers, *Astérisque* 100 (1982).

[2] A. Beauville, Y. Laszlo. Conformal blocks and generalized theta functions, *Comm. Math. Physics* 164 (1994), 385-419.

[3] N. Bourbaki. Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV-VI et VII-VIII.

[4] A. Bialynicki-Birula. On fixed points scheme of actions of multiplicative and additive groups, *Topology* 12 (1973) 99-103.

[5] W. Casselman, J. Shalika. The unramified principal series of $p$-adic groups, II. The Whittaker function, *Compositio Math.* 41 (1981), 207-231.

[6] P. Cartier. Representations of $\mathfrak{p}$-adic groups, 111-155 in *Automorphic forms, representations, and L-functions*, Proc. Symposia Pure Maths. Vol. XXXIII, Part 1 (A. Borel and W. Casselman eds.).

[7] P. Deligne. La conjecture de Weil II. *Publi. Math. IHES* 52 (1980) 313-428.

[8] S. Donkin. Good filtrations of rational modules, Lect. Notes Maths. 1140, Springer-Verlag, 1986.

[9] E. Frenkel, D. Gaitsgory, D. Kazhdan, K. Vilonen. Geometric realization of Whittaker functions and the Langlands correspondence, *J. A.M.S.* 11 (1998), 451-484.

[10] E. Frenkel, D. Gaitsgory, K. Vilonen. Whittaker patterns in the geometry of moduli spaces of bundles on curves, e-print math.AG/9907133.

[11] V. Ginzburg. Perverse sheaves on a loop group and Langlands duality, e-print alg-geom/9511007.

[12] A. Grothendieck. Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions $L$, Séminaire Bourbaki, Exp. 279, 1964/65, réédition Soc. Math. France, Paris, 1995.

[13] J.E. Humphreys. Introduction to Lie algebras and representation theory (2nd printing), Springer-Verlag, 1972.

[14] J.C. Jantzen. Lectures on quantum groups, Graduate Studies in Maths., vol. 6, AMS 1996.

[15] S. Kato. Spherical functions and $q$-analogue of Kostant's weight multiplicity formula, *Inv. Math.* 66 (1982) 461-468.

[16] D. Kazhdan, G. Lusztig. Schubert varieties and Poincaré duality, 185-203 *in* Proc. Symp. Pure Maths. Vol. 36, Amer. Math. Soc., 1980.

[17] Y. Laszlo, C. Sorger. The line bundles on the moduli of parabolic $G$-bundles over curves and their sections, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 30 (1997) 499-525.

[18] P. Littelmann. A Littlewood-Richardson rule for symmetrisable Kac-Moody Algebras, *Invent. math.* 116 (1994), 329-346.

[19] G. Lusztig. Singularities, character formulas, and a $q$-analog of weight multiplicities, 208-229 in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers II-III*, Astérisque 101-102 (1982).

[20] G. Lusztig. Cells in affine Weyl groups and tensor categories, *Adv. in Math.* 129 (1997), 85-98.

[21] I. Macdonald. Spherical functions of $p$-adic type, Publication of Ramanujan institute, Madras, 1971.

[22] I. Mirkovic, K. Vilonen. Perverse sheaves on loop Grassmannians and Langlands duality, e-print alg-geom/9703010.

[23] B.C. Ngô. Preuve d'une conjecture de Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen pour les groupes linéaires généraux, e-print math.AG/9801109 à paraître dans *Israel J. Math.*

[24] B.C. Ngô. Faisceaux pervers, homomorphisme de changement de base et lemme fondamental de Jacquet et Ye, *Ann. Sci. scient. Éc. Norm. Sup.* 32 (1999) 619-679.

[25] P. Polo, Variétés de Schubert et excellentes filtrations, 281-311 in *Astérisque* 173-174 (1989).

[26] A. Ramanathan. Deformation of principal bundles on the projective line, *Inv. Math.* 71 (1983) 165-191.

[27] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $p$-adic fields, *Publi. Math. I.H.E.S.* 18 (1963) 5-69.

[28] T. Shintani. On an explicit formula for class-1 "Whittaker function" on $GL_n$ over $\mathfrak{p}$-adic fields, *Proc. Jap. Acad.* 52(1976) 180-182

[29] R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups, Yale Monographs, 1968.

CNRS, UMR 7539, LAGA,
Institut Galilée,
Université Paris-Nord,
93430 Villetaneuse, France.

*Courriers électroniques :*

ngo@math.univ-paris13.fr
polo@math.univ-paris13.fr