

# BULLETIN DE LA S. M. F.

PATRICE ASSOUD

**Plongements lipschitziens dans  $\mathbb{R}^n$**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 111 (1983), p. 429-448.

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1983\\_\\_111\\_\\_429\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__429_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PLONGEMENTS LIPSCHITZIENS DANS $\mathbb{R}^n$

PAR

PATRICE ASSOUD (\*)

RÉSUMÉ. — Un plongement Lipschitzien d'un espace métrique  $(X, d)$  dans un autre espace métrique  $(Y, \delta)$  est une application  $f : X \rightarrow Y$  telle que :

$$\exists A, B \in ]0, +\infty[, \forall x, x' \in X, \quad A d(x, x') \leq \delta(f(x), f(x')) \leq B d(x, x').$$

Nous indiquons ici trois méthodes de construction d'un plongement Lipschitzien de l'espace métrique  $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|^p)$  dans un espace métrique  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ .

L'une de ces méthodes permet, pour  $k = 1$ , de minimiser le rang d'un tel plongement (c'est-à-dire de trouver la valeur minimale de l'entier  $n$ ).

ABSTRACT. — A Lipschitz embedding of a metric space  $(X, d)$  into another one  $(Y, \delta)$  is an application  $f : X \rightarrow Y$  such that :

$$\exists A, B \in ]0, +\infty[, \forall x, x' \in X, \quad A d(x, x') \leq \delta(f(x), f(x')) \leq B d(x, x').$$

We describe here three methods to obtain Lipschitz embeddings of the metric space  $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|^p)$  into some metric space  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ .

The third method allows us to minimize, for  $k = 1$ , the rank of such an embedding (i.e. to obtain the minimal value of the integer  $n$ ).

### Introduction

Soient  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  deux espaces métriques. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est appelée un *plongement Lipschitzien de  $(X, d)$  dans  $(Y, \delta)$*  s'il existe deux nombres  $A, B \in ]0, +\infty[$  tels qu'on ait

$$A d(x, x') \leq \delta(f(x), f(x')) \leq B d(x, x')$$

(\*) Texte reçu le 17 mai 1983.

P. ASSOUD, Université de Paris Sud, Centre d'Orsay, Département de Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay, Cedex.

quels que soient  $x, x' \in X$  (lorsqu'on veut être plus précis, on dit que  $f$  est un plongement  $(A, B)$ -Lipschitzien de  $(X, d)$  dans  $(Y, \delta)$ ).

A ce propos, quelques problèmes me semblent intéressants :

- comment reconnaître s'il existe, pour un espace métrique donné  $(X, d)$ , un entier  $n$  et un plongement Lipschitzien de  $(X, d)$  dans  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ ?
- si c'est le cas, calculer le rang de  $(X, d)$  (c'est-à-dire minimiser  $n$ );
- étudier comment décroît, lorsque  $n$  croît vers  $+\infty$ , la distortion de  $(X, d)$  dans  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$  (c'est-à-dire la borne inférieure de  $\text{Log} \left( \frac{B}{A} \right)$  pour tous les plongements Lipschitziens de  $(X, d)$  dans  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ ).

Dans le présent travail, nous étudierons surtout, de ce point de vue, l'espace métrique  $(\mathbb{R}^k, \| \cdot \|^p)$  :

(a) nous indiquons trois méthodes de plongement de  $(\mathbb{R}^k, \| \cdot \|^p)$  dans  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$  :

- la première méthode (très simple, mais qui ne donne pas une bonne évaluation du rang ni de la distortion) peut, en particulier, être effectuée à l'aide de séries lacunaires ou de la base de Schauder;
- la seconde méthode, qui généralise la précédente, permet de plonger l'espace  $(X, d^p)$  dans un espace  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ , quel que soit le nombre  $p \in ]0, 1[$ , pour tout espace métrique  $(X, d)$  de dimension métrique finie (ces espaces sont étudiés notamment dans [1]);
- la troisième méthode utilise des courbes de Von KOCH généralisées (de fait cette méthode étend l'observation, due à GLAESER [5] p. 57, que la courbe classique de H. Von KOCH [7] réalise un plongement Lipschitzien de l'espace  $([0, 1], \| \cdot \|^{\text{Log}^3/\text{Log}^4})$  dans  $(\mathbb{R}^2, \| \cdot \|)$ ).

(b) Nous montrons que cette troisième méthode permet, au moins pour  $k = 1$ , d'obtenir la valeur exacte du rang de l'espace  $([0, 1]^k, \| \cdot \|^p)$ .

Voici donc comment se subdivise ce travail :

- Paragraphe 1 Base de SCHAUDER et séries lacunaires.
- Paragraphe 2 Dimension métrique et plongement.
- Paragraphe 3 Courbes de Von KOCH généralisées.
- Paragraphe 4 Rang de l'espace  $([0, 1]^k, \| \cdot \|^p)$ .

### Remerciements

Ce travail fut d'abord écrit en anglais (mars 1981); je tiens à exprimer ma gratitude envers ceux qui m'ont encouragé à lui donner la forme présente.

**Notations**

– Soit  $k$  un entier  $\geq 1$ ; on note alors toujours  $\| \cdot \|$  la norme Euclidienne sur  $\mathbb{R}^k$ .

– Soit  $p \in ]0, 1[$ ; si  $T$  est une partie d'un espace Euclidien  $(E, \| \cdot \|)$ , on note  $(T, \| \cdot \|_p)$  l'ensemble  $T$  muni de la distance  $s, t \rightarrow \|s - t\|_p^p$

(il s'agit bien d'un espace métrique, non d'un espace normé).

– Soit  $b \in ]0, +\infty[$ ; une partie  $T$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est dite *b-discernable* (resp. de diamètre  $\leq b$ ) si on a  $d(s, t) > b$  (resp.  $d(s, t) \leq b$ ) pour tout couple  $(s, t)$  de points distincts de  $T$ .

– Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels; nous écrivons alors :

$x \wedge y$  pour  $\text{Inf}(x, y)$ ,  $x \vee y$  pour  $\text{Sup}(x, y)$ , et  $x^+$  pour  $\text{Sup}(x, 0)$ .

**1 Base de Schauder et séries lacunaires**

Nous allons indiquer d'abord *une construction assez générale* (elle peut s'effectuer à l'aide de la base de Schauder ou de séries lacunaires, ainsi qu'on le verra ensuite; elle s'appliquera également au paragraphe 2) :

(1.1) (a) Soit  $\varphi$  une application d'un espace  $(X, d)$  dans un espace de Hilbert  $(E, \| \cdot \|)$ , et soient  $\tau \in ]0, 1[$  [et  $A, B, c \in ]0, +\infty[$ ; on dit que  $\varphi$  est un *plongement local*  $(\tau, A, B, c)$ -*contrôlé de*  $(X, d)$  *dans*  $(E, \| \cdot \|)$  si elle vérifie les conditions suivantes, quels que soient  $s, t \in X$  :

(a1)  $\tau c < d(s, t) \leq c$  implique  $\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \geq A$ ;

(a2)  $\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq B(d(s, t) \wedge 1)$ ;

(b) soit  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite, périodique de période  $2N$ , d'éléments d'un espace Euclidien  $(F, \| \cdot \|)$ ; on dit que  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une *base cyclique* de  $(F, \| \cdot \|)$  si  $(v_1, \dots, v_{2N})$  est une base orthonormale de  $(F, \| \cdot \|)$ .

**PROPOSITION 1.2.** – Soient  $\tau, p \in ]0, 1[$  et  $A, B, c \in ]0, +\infty[$ . Soit  $(X, d)$  un espace métrique, où on distingue un point 0, et soit  $(E, \| \cdot \|)$  un espace de Hilbert.

Pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ , on se donne un plongement local  $\varphi_j, (\tau, A, B, c)$ -contrôlé et nul en 0, de l'espace  $(X, \tau^{-j}d)$  dans  $(E, \| \cdot \|)$ . On se donne aussi une base cyclique  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  d'un espace Euclidien  $(F, \| \cdot \|)$  de dimension  $2N$ .

Pour chaque  $s \in X$ , on pose  $f(s) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{jp} \varphi_j(s) \otimes v_j$ . On a alors :

$$B \left( \frac{c^{-p}}{1 - \tau^p} + \frac{c^{1-p}}{1 - \tau^{1-p}} \right) d^p(s, t) \geq \|f(s) - f(t)\| \\ \geq \left[ Ac^{-p} - B \left( \frac{c^{-p}}{1 - \tau^p} \tau^{Np} + \frac{c^{1-p}}{1 - \tau^{1-p}} \tau^{N(1-p)} \right) \right] d^p(s, t).$$

En particulier, l'application  $f$  est un plongement Lipschitzien de  $(X, d^p)$  dans  $(E \otimes F, \|\cdot\|)$ , dès que  $N$  est assez grand pour qu'on ait  $\frac{A}{B} > \frac{\tau^{Np}}{1 - \tau^p} + c \frac{\tau^{N(1-p)}}{1 - \tau^{1-p}}$ .  $(E \otimes F)$  est muni du produit tensoriel des structures Hilbertiennes de  $E$  et de  $F$ .

*Démonstration.* — Pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ , on note  $f_j$  l'application  $s \rightarrow \tau^{jp} \varphi_j(s) \otimes v_j$ . On a  $f(0) = 0$ ; la majoration de  $\|f(s) - f(t)\|$  que nous nous proposons d'établir suffira donc à montrer la convergence de la série  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ . Soit  $(s, t)$  un couple de points distincts de  $X$ , et soit  $l$  un entier tel que  $\tau^{l+1} < \frac{1}{c} d(s, t) \leq \tau^l$ .

(a) (Majoration). On a alors :

$$\|f(s) - f(t)\| \leq \sum_{j \geq l+1} \|f_j(s) - f_j(t)\| + \sum_{j \leq l} \|f_j(s) - f_j(t)\| \\ \leq \sum_{j \geq l+1} B \tau^{jp} + \sum_{j \leq l} B \tau^{j(p-1)} d(s, t) \\ \leq B \left( \frac{1}{1 - \tau^p} \tau^{(l+1)p} + \frac{d(s, t)}{1 - \tau^{1-p}} \tau^{l(p-1)} \right) \\ \leq B \left( \frac{c^{-p}}{1 - \tau^p} + \frac{c^{1-p}}{1 - \tau^{1-p}} \right) d^p(s, t).$$

(b) (Minoration). On a aussi :

$$\|f(s) - f(t)\| \geq \left\| \sum_{-N < j-l \leq N} (f_j(s) - f_j(t)) \right\| \\ - \sum_{j-l > N} \|f_j(s) - f_j(t)\| - \sum_{j-l \leq -N} \|f_j(s) - f_j(t)\| \\ \geq \|f(s) - f_l(t)\| - \sum_{j-l > N} B \tau^{jp} + \sum_{j-l \leq -N} B \tau^{j(p-1)} d(s, t) \\ \geq A \tau^{lp} - B \left( \frac{1}{1 - \tau^p} \tau^{(N+l+1)p} + \frac{d(s, t)}{1 - \tau^{1-p}} \tau^{(l-N)(p-1)} \right) \\ \geq \left[ Ac^{-p} - B \left( \frac{c^{-p}}{1 - \tau^p} \tau^{Np} + \frac{c^{1-p}}{1 - \tau^{1-p}} \tau^{N(1-p)} \right) \right] d^p(s, t). \quad \square$$

Précisons un peu la Proposition précédente :

(1.3) (a) Si  $E$  est de dimension  $M$ , on a donc obtenu un plongement Lipschitzien de l'espace  $(X, d^p)$  dans  $(\mathbb{R}^{2NM}, \|\cdot\|)$ ; mais  $2NM$  n'est pas une bonne évaluation du rang de l'espace  $(X, d^p)$ , ainsi qu'on le verra au paragraphe 4.

(b) On peut noter que la construction ci-dessus ne fonctionne pas bien lorsque  $p$  tend vers 1 (même lorsque, pour  $p = 1$ , le plongement est trivial).

(c) Soit  $m \in \mathbb{Z}$ ; si  $T$  est une partie de diamètre  $\leq c\tau^m$  de l'espace  $(X, d)$ , alors l'application  $s \rightarrow \sum_{j \geq m} \tau^{jp} \varphi_j(s) \otimes v_j$  est un plongement Lipschitzien de l'espace  $(T, d^p)$  dans  $(E \otimes F, \|\cdot\|)$ , dès que  $N$  est assez grand.

(d) Soit  $m \in \mathbb{Z}$ ; si  $T$  est une partie  $c\tau^m$ -discernable de l'espace  $(X, d)$ , alors l'application  $s \rightarrow \sum_{j < m} \tau^{jp} \varphi_j(s) \otimes v_j$  est un plongement Lipschitzien de l'espace  $(T, d^p)$  dans  $(E \otimes F, \|\cdot\|)$ , dès que  $N$  est assez grand ((c) et (d) se démontrent exactement comme la Proposition 1.2, mais en tenant compte des valeurs que peut prendre  $l$ ).

1.4. COROLLAIRE. — Soient  $\tau, p \in ]0, 1[$  et  $A, B, c \in ]0, +\infty[$ . Soit  $\varphi$  un plongement local  $(\tau, A, B, c)$ -contrôlé de  $\mathbb{R}^k$  dans un espace Euclidien  $(E, \|\cdot\|)$  et soit  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une base cyclique d'un espace Euclidien  $(E, \|\cdot\|)$  de dimension  $2N$ .

Pour chaque  $s \in \mathbb{R}^k$ , on pose  $f(s) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{jp} \varphi(\tau^{-j}s) \otimes v_j$ . Alors  $f$  est un plongement Lipschitzien de  $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|^p)$  dans  $(E \otimes F, \|\cdot\|)$ , dès que  $N$  est assez grand.

Démonstration. — En effet, pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ , l'application  $\varphi_j : s \rightarrow \varphi(\tau^{-j}s)$  est un plongement local  $(\tau, A, B, c)$ -contrôlé de l'espace  $(\mathbb{R}^k, \tau^{-j} \|\cdot\|)$  dans  $(E, \|\cdot\|)$ .  $\square$

Indiquons quelques exemples de plongements locaux de  $\mathbb{R}$  dans un espace Euclidien :

(1.5) Fixons  $\tau \in ]0, 1[$  et prenons  $E = \mathbb{C}$  (considéré comme un espace Euclidien de dimension 2 sur  $\mathbb{R}$ ). La fonction  $\varphi : s \rightarrow \exp(is) - 1$  est alors un plongement local  $(\tau, A, 2, c)$ -contrôlé de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$

(en prenant par exemple  $c = \frac{2\pi}{1 + \tau}$  et  $A = |\varphi(c\tau)|$ ).

On peut donc en particulier plonger  $([0, 1], \|\cdot\|^p)$  dans un espace Euclidien à l'aide d'une série de Fourier lacunaire à coefficients vectoriels convenables.

(1.6) Fixons  $\tau \in ]0, 1[$  et prenons  $E = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  (la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  sera notée  $(e_1, e_2)$ ). Pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$  et chaque  $z \in D_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$ , on note  $\Delta_{j,z}$  la

fonction  $s \rightarrow (1 - |1 + 2^{j+1}(z - s)|)^+$  (base de Schauder). Soit  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; la fonction

$$\varphi_\lambda = \sum_{r \text{ pair}} e_1 \otimes (e_1 \Delta_{0,r} + \lambda e_2 \Delta_{1,r/2}) + \sum_{r \text{ impair}} e_2 \otimes (e_1 \Delta_{0,r} + \lambda e_2 \Delta_{1,r/2})$$

est alors un plongement local  $(\tau, A, B, c)$ -contrôlé de  $\mathbb{R}$  dans  $E$ , pour des valeurs convenables de  $A, B, c$  (car  $\varphi_\lambda$  est injective sur tout intervalle de longueur  $< 1$ , bornée, Lipschitzienne et périodique).

1.7. COROLLAIRE. — Prenons, en particulier,  $\tau = \frac{1}{4}$  et  $\lambda = 2^{-p}$ . Le plongement  $f$  de  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|^p)$  dans un espace Euclidien construit à l'aide du plongement local  $\varphi_\lambda$  peut alors s'écrire  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{z \in D_j} 2^{-jp} u'_{j,z} \otimes v'_j \Delta_{j,z}$ , où la suite  $(v'_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  (resp., pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ , la suite  $r \rightarrow u'_{j,r2^{-j}}$ ) est une base cyclique d'un espace Euclidien  $F'$  (resp.  $E'$ ) de dimension convenable.

Démonstration. — On pose, pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $v'_{2j} = e_1 \otimes v_j$  et  $v'_{2j+1} = e_2 \otimes v_j$ ; de plus, pour chaque  $z \in D_j$ , on pose  $u'_{j,z} = e_1$  si  $z2^j$  est pair, et  $u'_{j,z} = e_2$  sinon. La suite  $(v'_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est donc une base cyclique de  $F' = \mathbb{R}^2 \otimes F$ ; d'autre part, pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ , la suite  $r \rightarrow u'_{j,r2^{-j}}$  est une base cyclique de  $E' = \mathbb{R}^2$ .

On vérifie immédiatement que le plongement  $f$  est de la forme annoncée.  $\square$

Nous allons voir, dans le prochain paragraphe, que le procédé de plongement indiqué en 1.2 est susceptible de s'appliquer à des espaces métriques assez généraux.

## 2 Dimension métrique et plongement

(2.1) On dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  est  $(C, s)$ -homogène si on a  $|Y \cap Z| \leq C \left(\frac{b}{a}\right)^s$ , quels que soient  $a, b \in ]0, +\infty[$  ( $a < b$ ) et quel que soit  $Y$  (resp.  $Z$ )  $a$ -discernable (resp. de diamètre  $\leq b$ ) dans l'espace  $(X, d)$ . La dimension métrique de  $(X, d)$  (qui est notée  $\text{Dim}(X, d)$ ) est la borne inférieure des nombres réels  $s \geq 0$  tels que, pour un certain  $C \in ]0, +\infty[$ , l'espace  $(X, d)$  soit  $(C, s)$ -homogène.

Cette notion de dimension métrique (il y en a d'autres) est ancienne, puisqu'elle remonte à un article de G. BOULIGAND [3] (1928). Les résultats qui vont suivre sont plus récents, et figurent dans ma thèse [1] (1977).

(2.2) (a) la dimension métrique de  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  est égale à  $n$  (quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ );

(b) la dimension métrique de  $(X, d^p)$  est égale à  $\frac{1}{p} \text{Dim}(X, d)$  (pour tout  $p \in ]0, 1[$ );

(c) si  $f$  est un plongement Lipschitzien de  $(X, d)$  dans  $(Y, \delta)$ , on a alors  $\text{Dim}(X, d) \leq \text{Dim}(Y, \delta)$ .

Il résulte de (a) et de (c) que, si  $(X, d)$  admet un plongement Lipschitzien dans un espace  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , alors l'espace  $(X, d^p)$  est de dimension métrique finie, quel que soit  $p \in ]0, 1[$ . Nous nous proposons d'établir une sorte de réciproque à cette observation. Nous aurons besoin de deux Lemmes.

(2.3) Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $b$  un nombre réel  $> 0$  et  $M$  un entier  $\geq 2$ ; on appelle  $(M, b)$ -coloriage de  $(X, d)$  toute application  $k : X \rightarrow \{1, \dots, M\}$  telle que  $d(s, s') \leq b$  implique  $k(s) \neq k(s')$ , quels que soient  $s, s' \in X$  ( $s \neq s'$ ).

Comme on le sait (BROOKS [4]), tout graphe de degré  $< M$  possède un  $M$ -coloriage. Cela peut se reformuler ainsi :

2.4. LEMME. — Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $b$  un nombre réel  $> 0$  et  $M$  un entier  $\geq 2$ . On suppose qu'on a  $|\{x \in X \mid d(x, s) \leq b\}| \leq M$ , quel que soit  $s \in X$ .

L'espace  $(X, d)$  admet alors un  $(M, b)$ -coloriage.

Démonstration. On munit  $X$  d'un bon ordre en l'identifiant à l'ensemble des ordinaux de cardinal  $< \text{Card}(X)$ ; pour chaque  $\alpha \in X$ , on pose  $X_\alpha = \{\beta \in X \mid 0 \leq \beta < \alpha\}$ .

(a) Fixons  $\alpha \in X$  et supposons défini un  $(M, b)$ -coloriage  $k_\alpha$  de  $(X_\alpha, d)$ ; soit  $V$  l'ensemble des valeurs prises par  $k_\alpha$  sur  $\{\beta \in X_\alpha \mid d(\beta, \alpha) \leq b\}$ ; on peut choisir un élément  $m$  de  $\{1, \dots, M\} \setminus V$ ; on définit alors un  $(M, b)$ -coloriage  $k_{\alpha+1}$  de  $(X_{\alpha+1}, d)$  prolongeant  $k_\alpha$  en posant  $k_{\alpha+1}(\alpha) = m$ .

(b) Cela permet de définir inductivement, pour chaque  $\alpha \in X$ , un  $(M, b)$ -coloriage  $k_\alpha$  de  $(X_\alpha, d)$  de façon que  $k_\alpha$  prolonge  $k_\beta$ , quels que soient  $\alpha \in X$  et  $\beta \in X_\alpha$ .

L'application  $k : X \rightarrow \{1, \dots, M\}$  qui prolonge chacun des  $k_\alpha$  est alors un  $(M, b)$ -coloriage de  $(X, d)$ .  $\square$

2.5. LEMME. — Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $Y$  un 1-réseau de  $(X, d)$  (c'est-à-dire une partie 1-discernable maximale),  $b$  un nombre réel  $> 8$  et  $M$  un entier  $\geq 2$ .

On note  $(e_1, \dots, e_M)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^M$ . Soit  $k$  un  $(M, b)$ -coloriage de  $(Y, d)$ . Alors l'application  $\varphi : s \rightarrow \sum_{y \in Y} (2 - d(s, y))^+ e_{k(y)}$  est un plongement local  $(\tau, A, B, c)$ -contrôlé de  $(X, d)$  dans  $(\mathbb{R}^M, \|\cdot\|)$ , pour  $c = b - 4$ ,  $\tau = \frac{4}{c}$ ,  $A = \sqrt{2}$  et  $B = 4M$ .

*Démonstration.* — Pour chaque  $y \in Y$ , on note  $\Delta_y$  l'application  $s \rightarrow (2 - d(s, y))^+$ .

Pour chaque  $s \in X$ , on pose  $B_s = \{y \in Y \mid \Delta_y(s) \neq 0\}$ .

(a) Soient  $s, t \in X$  avec  $4 < d(s, t) \leq b - 4$ . Alors les ensembles  $B_s$  et  $B_t$  sont disjoints et le coloriage  $k$  est injectif sur  $B_s \cup B_t$ . On a donc :

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\|^2 \geq \text{Sup} \{ \Delta_y^2(s) + \Delta_y^2(t) \mid y \in B_s, z \in B_t \} \geq 2.$$

(b) Soient  $s, t \in X$ . Pour chaque  $y \in Y$ , on a  $|\Delta_y(s) - \Delta_y(t)| \leq 2(d(s, t) \wedge 1)$ .

Or on a  $|B_s \cup B_t| \leq 2M$  (car  $k$  est injectif sur  $B_s$  et sur  $B_t$ ). On a donc :

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leq \sum_{y \in B_s \cup B_t} |\Delta_y(s) - \Delta_y(t)| \leq 4M(d(s, t) \wedge 1). \quad \square$$

Nous arrivons maintenant au résultat que nous avons en vue :

**2.6. PROPOSITION.** — Soit  $(X, d)$  un espace métrique de dimension métrique finie et soit  $p \in ]0, 1[$ . Il existe alors un entier  $n \geq 0$  et un plongement Lipschitzien de l'espace  $(X, d^p)$  dans l'espace Euclidien  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ .

*Démonstration.* — (a) On choisit  $C \in ]0, +\infty[$  et  $s \in ]0, +\infty[$  tels que l'espace  $(X, d)$  soit  $(C, s)$ -homogène. Soit  $\tau$  un élément de  $]0, 1[$ ; on pose  $c = \frac{4}{\tau}$ ,  $b = c + 4$ ,  $A = \sqrt{2}$ ,  $M = C(2b)^s$  et  $B = 4M$ . Enfin nous allons distinguer un point 0 dans  $X$ .

(b) Fixons  $j \in \mathbb{Z}$ . L'espace  $(X, \tau^{-j}d)$  est, lui aussi,  $(C, s)$ -homogène. Soit  $Y_j$  un 1-réseau de  $(X, \tau^{-j}d)$ ; on a donc  $|\{y \in Y_j \mid \tau^{-j}d(y, z) \leq b\}| \leq M$ , quel que soit  $z \in Y_j$ . L'espace  $(Y_j, \tau^{-j}d)$  admet donc un  $(M, b)$ -coloriage (voir 2.4) et il existe donc un plongement local  $\varphi_j, (\tau, A, B, c)$ -contrôlé, de l'espace  $(X, \tau^{-j}d)$  dans l'espace Euclidien  $(\mathbb{R}^M, \|\cdot\|)$  (voir 2.5). Quitte à remplacer  $\varphi_j$  par  $\varphi_j - \varphi_j(0)$ , on peut même supposer que  $\varphi_j$  est nul en 0.

(c) On a donc obtenu, pour chaque  $j \in \mathbb{Z}$ , un plongement local  $\varphi_j, (\tau, A, B, c)$ -contrôlé et nul en 0, de  $(X, \tau^{-j}d)$  dans  $(\mathbb{R}^M, \|\cdot\|)$ . Soit  $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une base cyclique d'un espace Euclidien  $(F, \|\cdot\|)$ . Si la dimension de  $F$  est assez grande, alors l'application  $f : s \rightarrow \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{jp} \varphi_j(s) \otimes v_j$  est un plongement Lipschitzien de l'espace  $(X, d^p)$  dans l'espace Euclidien  $(\mathbb{R}^M \otimes F, \|\cdot\|)$  (voir 1.2).  $\square$

### 3. Courbes de Von Koch généralisées

La construction que nous allons écrire généralise, comme on le verra, celle de la courbe de Von Koch classique [7]; c'est ce qui justifie notre terminologie.

3.1. Soient  $l$  un entier  $\geq 2$ ,  $\eta$  un élément de  $]0, 1[$ ,  $\psi$  un élément de  $[0, \pi[$ ,  $K$  une partie compacte de  $\mathbb{R}^n$  et  $a_0$  et  $a_l$  deux points distincts de  $K$ .

Nous appellerons *chaîne de Von Koch de longueur  $l$ , d'échelle  $\eta$ , de souplesse  $\leq \psi$  et de maille  $(a_0, K, a_l)$  dans  $\mathbb{R}^n$*  toute famille  $T = (T_0, \dots, T_{l-1})$  d'isométries de l'espace Euclidien  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) pour chaque  $r = 0, \dots, l-1$ , l'ensemble  $\eta T_r(K)$  (noté  $K_r$ ) est inclus dans  $K$ ;
- (b) on a  $\eta T_0(a_0) = a_0$  et  $\eta T_{l-1}(a_l) = a_l$ ;
- (c) pour chaque  $r = 1, \dots, l-1$ , le point  $\eta T_r(a_0)$  (noté  $a_r$ ) est égal à  $\eta T_{r-1}(a_l)$ ;
- (d) pour chaque  $r = 1, \dots, l-1$ , on a

$$(x - a_r | y - a_r) + \|x - a_r\| \|y - a_r\| \cos \psi \leq 0,$$

quels que soient  $x \in K_{r-1}$  et  $y \in K_r$ ;

- (e)  $K_r$  et  $K_{r'}$  sont disjoints, quels que soient  $r, r' \in \{0, \dots, l-1\}$  avec  $|r - r'| \geq 2$ .

La suite  $(a_0, K_0, a_1, K_1, \dots, a_{l-1}, K_{l-1}, a_l)$  est appelée le *support*, les points  $a_0, \dots, a_l$  les *sommets* et les ensembles  $K_0, \dots, K_{l-1}$  les *maillons* de la chaîne  $T$ .

Chaque chaîne de Von Koch va permettre la construction suivante :

3.2. Soit  $T = (T_0, \dots, T_{l-1})$  une chaîne de Von Koch de longueur  $l$ , d'échelle  $\eta$ , de souplesse  $\leq \psi$  et de maille  $(a_0, K, a_l)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

(a) Pour chaque entier  $j \geq 1$ , on note  $D_j^l$  l'ensemble des nombres réels  $t$  de la forme  $t = \sum_{i=1}^j r_i l^{-i}$  avec  $r_1, r_2, \dots, r_j \in \{0, \dots, l-1\}$ . On note  $D^l$  la réunion des ensembles  $D_j^l$  (pour  $j \geq 1$ ). Pour chaque  $r = 0, \dots, l-1$ , on pose  $S_r = \eta T_r$ .

(b) Pour chaque entier  $j \geq 1$  et chaque élément  $t = \sum_{i=1}^j r_i l^{-i}$  de  $D_j^l$  (avec  $r_1, \dots, r_j \in \{0, \dots, l-1\}$ ), on pose  $f_j(t) = S_{r_1} S_{r_2} \dots S_{r_j}(a_0)$ .

(c) Pour chaque entiers  $j, k$  (avec  $j \leq k$ ), l'application  $f_k$  prolonge évidemment l'application  $f_j$  (puisque l'on a  $S_0(a_0) = a_0$ , voir 3.1 b); on note  $f_T$  l'application de  $D^l$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui est égale à  $f_j$  sur  $D_j^l$ , quel que soit l'entier  $j \geq 1$ ;

l'ensemble  $\gamma_T = f_T(D^b)$  est alors appelé *courbe de Von Koch généralisée relative à la chaîne T*.

Il y a un abus de langage à appeler  $\gamma_T$  une courbe; mais nous allons montrer que l'adhérence de  $\gamma_T$  est effectivement une courbe, et, plus précisément, que le prolongement par continuité de  $f_T$  à  $[0, 1]$  est, pour un certain  $p \in ]0, 1[$ , un plongement Lipschitzien de  $([0, 1], \|\cdot\|^p)$  dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ .

Avant de démontrer cela, indiquons quelques exemples de chaînes de Von Koch :

3.3. Identifions l'espace Euclidien  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$  à  $\mathbb{C}$ , et fixons  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ; on pose  $a_0 = 1 + e^{i\theta}$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = -\bar{a}_0$  et on note  $K$  le triangle de sommets  $a_0, a_1, a_2$ ,  $K_0$  le triangle de sommets  $a_0, a_0 - 1, a_1$  et  $K_1$  le triangle de sommets  $a_1, a_2 + 1, a_2$ . Visiblement, il existe une chaîne de Von Koch et une seule maille  $(a_0, K, a_2)$  et ayant pour support la suite  $(a_0, K_0, a_1, K_1, a_2)$ ; c'est une chaîne  $T$  de longueur 2, d'échelle  $\left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)^{-1}$  et de souplesse  $\leq 2\theta$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

(a) En particulier, pour  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , la courbe  $\gamma_T$  est l'ensemble des points à paramètre dyadique de la *courbe de Von Koch classique* (voir [7]).

(b) Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (ce que nous nous sommes interdit), la souplesse ne serait plus bornée et  $\gamma_T$  serait l'ensemble des points à paramètre dyadique d'une courbe de Peano remplissant  $K$ .

Nous allons construire une classe assez large de chaînes de Von Koch :

3.4. Soient  $n$  un entier  $\geq 1$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

(a) Soit  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ ; on pose  $S(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = \operatorname{tg} \theta, (x | e_1) = 0\}$ ; et on note  $D(\theta)$  l'enveloppe convexe de  $S(\theta) \cup \{e_1, -e_1\}$ .

(b) On dit que deux points  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{Z}^n$  sont adjacents si on a  $\|x - y\| = 1$ .

(c) Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{Z}^n$ . Une suite  $\gamma = (x_0, \dots, x_l)$  de points distincts de  $X$  est appelée un *chemin de longueur l joignant  $x_0$  à  $x_l$  dans  $X$*  si  $x_{r-1}$  et  $x_r$  sont adjacents, quel que soit  $r = 1, \dots, l$ .

3.5. LEMME. — Soient  $k_1, \dots, k_n$  des entiers  $\geq 0$ . On pose

$$X = \prod_{i=1}^n \{0, \dots, 2k_i\} \text{ et } a = 2 \sum_{i=1}^n k_i e_i.$$

Il existe alors un chemin  $\gamma$  de longueur  $2l$  joignant  $0$  à  $a$  dans  $X$ , quel que soit l'entier  $l$  vérifiant  $\sum_{i=1}^n k_i \leq l \leq \frac{1}{2} [\prod_{i=1}^n (2k_i + 1) - 1]$ .

*Démonstration* (récurrence sur  $\sum_{i=1}^n k_i$ ). — Soient  $k_1, \dots, k_n$  des entiers  $\geq 0$  et supposons le résultat démontré pour tous  $k'_1, \dots, k'_n$  avec  $\sum_{i=1}^n k'_i < \sum_{i=1}^n k_i$ .

(a) Nous allons supposer  $k_1 \geq 1$  (quitte à permuter les coordonnées) et poser  $m_2 = \sum_{i=2}^n k_i$ ,  $M_2 = \frac{1}{2} [\prod_{i=2}^n (2k_i + 1) - 1]$ ,  $m_1 = m_2 + k_1 - 1$ ,  $M_1 = \frac{1}{2} [(2M_2 + 1)(2k_1 - 1) - 1]$  et enfin  $m = m_1 + 1$ ,  $M = M_1 + 2M_2 + 1$ . On note  $X_1$  (resp.  $X_2$ , resp.  $X_3$ ) l'ensemble des points  $x$  de  $X$  tels que  $(x | e_1)$  soit inférieur ou égal à  $2k_1 - 2$  (resp. soit égal à  $2k_1 - 1$ , resp. soit égal à  $2k_1$ ).

(b) Soit  $l$  un entier vérifiant  $m \leq l \leq M$ ; il existe donc des entiers  $l_1$  et  $l_2$  avec  $m_1 \leq l_1 \leq M_1$ ,  $0 \leq l_2 \leq M_2$  et  $l = l_1 + 2l_2 + 1$ . Il existe donc (par l'hypothèse de récurrence) un chemin  $\gamma_1$  de longueur  $2l_1$  joignant  $0$  à  $a_1 = a - 2e_1$  dans  $X_1$ , un point  $b_2$  de  $X_2$  et un chemin  $\gamma_2$  de longueur  $2l_2$  joignant  $a_2 = a - e_1$  à  $b_2$  dans  $X_2$ ; il existe donc aussi un chemin  $\gamma_3$  de longueur  $2l_2$  joignant  $b_3 = b_2 + e_1$  à  $a$  dans  $X_3$ . Soit  $\gamma$  le chemin obtenu en mettant bout à bout les chemins  $\gamma_1, (a_1, a_2), \gamma_2, (b_2, b_3)$  et  $\gamma_3$ ; c'est le chemin de longueur  $2l$  cherché.  $\square$

3.6. PROPOSITION. — Soient  $p$  un élément de  $]0, 1[$ ,  $n$  un entier  $> \frac{1}{p}$  et  $\psi$  un élément de  $] \frac{2\pi}{3}, \pi [$ . Il existe alors un entier  $l \geq 2$  et une chaîne de Von Kock de longueur  $l$ , d'échelle  $l^{-p}$  et de souplesse  $\leq \psi$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* — (a) On prend  $\theta = \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{3}$ . On choisit un nombre réel  $\beta > 0$  tel que le cube  $[-2\beta, 2\beta]^n$  soit inclus dans  $\frac{1}{2} D(\theta)$ . On choisit un entier pair  $l \geq 2$  vérifiant  $2n(1 + \beta)^l \leq l \leq \beta^n l^n - 1$  (cela est possible parce qu'on a  $p < 1 < pn$ ).

On pose  $\eta = l^{-p}$  et on note  $N$  la partie entière de  $\beta l^p$ .

(b) On pose  $b = N \sum_{i=1}^n e_i$ ,  $K = \frac{1}{2\eta} D(\theta)$ ,  $a_0 = \frac{1}{\eta} e_1$  et  $X = \{ -N, \dots, N \}^n$ . Une suite  $\gamma = (y_0, \dots, y_q)$  de points distincts d'une partie  $Y$  de  $K$  sera appelée ici une piste de longueur  $q$  joignant  $y_0$  à  $y_q$  dans  $Y$  si  $y_0, \dots, y_q$  sont des sommets

consécutifs d'une chaîne de Von Koch d'échelle  $\eta$ , de souplesse  $\leq \psi$  et de maille  $(a_0, K, -a_0)$ .

(c) Soient

$$Y^+ = \{x \in K \mid (x|e_1) \geq N + 1\}$$

et

$$Y^- = \{x \in K \mid (x|e_1) \leq -(N + 1)\}.$$

Visiblement on peut joindre  $a_0$  à  $b' = b + e_1$  par une piste  $\gamma^+$  de longueur  $r \leq \frac{n}{\eta} - 1$  dans  $Y^+$  (c'est pour cela qu'on a pris  $\psi > \frac{2\pi}{3}$ ). De même on peut joindre  $-b'$  à  $-a_0$  par une piste  $\gamma^-$  de longueur  $r$  dans  $Y^-$ . Le nombre entier  $l - 2r - 2$  est donc pair et vérifie

$$2nN \leq l - 2r - 2 \leq (2N + 1)^n - 1.$$

Il existe donc (voir Lemme 3.5) un chemin  $\gamma_0$  de longueur  $l - 2r - 2$  joignant  $b$  à  $-b$  dans  $X$ . Soit  $\gamma$  la suite obtenue en mettant bout à bout les chemins  $\gamma^+$ ,  $(b', b)$ ,  $\gamma_0$ ,  $(-b, -b')$  et  $\gamma^-$ ; c'est une piste de longueur  $l$  joignant  $a_0$  à  $-a_0$  dans  $K$ , ce qui démontre la Proposition.  $\square$

Ayant obtenu suffisamment d'exemples de chaînes de Von Koch, nous allons montrer maintenant que chaque chaîne de longueur  $l$  et d'échelle  $l^{-p}$  dans  $\mathbb{R}^n$  définit un plongement Lipschitzien de  $([0, 1], \| \cdot \|^p)$  dans  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ .

Voici quelques observations préliminaires :

3.7. (a) Soit  $T$  une chaîne de Von Koch de longueur  $l$ , d'échelle  $\eta$  et de maille  $(a_0, K, a_l)$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f_T$  l'application de  $D^l$  dans  $\mathbb{R}^n$  qu'elle définit (voir 3.2). Alors les points  $F_T(0)$ ,  $f_T\left(\frac{1}{l}\right)$ , ...,  $f_T\left(\frac{l-1}{l}\right)$ ,  $a_l$  sont les sommets de la chaîne  $T$ .

(b) Soit  $k$  un entier  $\geq 2$ . Alors les points

$$f_T(0), f_T(l^{-k}), f_T(2l^{-k}), \dots, f_T((l^k - 1)l^{-k}),$$

$a_l$  sont les sommets d'une chaîne  $T(k)$  de longueur  $l^k$ , d'échelle  $\eta^k$ , de maille  $(a_0, K, a_l)$  et qui vérifie  $f_{T(k)} = f_T$  (observer qu'on a  $D^{l^k} = D^l$ ).

(c) Soient  $x, y \in D^l$  avec  $|x - y| > \frac{1}{2l}$ ; alors  $f_T(x)$  et  $f_T(y)$  appartiennent à des maillons non consécutifs de la chaîne  $T(3)$  (parce qu'on a  $\frac{1}{2l} \geq 2l^{-3}$ ).

(d) La quantité  $A_T = \text{Inf} \left\{ \|f_T(x) - f_T(y)\| \mid |x - y| > \frac{1}{2l} \right\}$  est donc nulle.

Par ailleurs nous noterons  $B_T$  le diamètre de  $K$ .

(e) Soient  $s, t \in D^j$  (avec  $s < t$ ); soit  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $]s, t[$  ne contienne aucun élément de  $D_j^j$ . On pose  $\bar{s}^j = l^j(s - z)$  et  $\bar{t}^j = l^j(t - z)$ , où  $z$  est le plus grand élément de  $D_j^j$  inférieur ou égal à  $s$ . On a alors

$$\|f_T(s) - f_T(t)\| = l^{-jp} \|f_T(\bar{s}^j) - f_T(\bar{t}^j)\| \leq B_T l^{-jp}.$$

Si de plus on a  $|s - t| > \frac{1}{2} l^{-(j+1)}$ , alors on a aussi  $\|f_T(s) - f_T(t)\| \geq A_T l^{-jp}$ .

3.8. PROPOSITION. — Soit  $p$  un élément de  $]0, 1[$  et soit  $T = (T_0, \dots, T_{l-1})$  une chaîne de Von Koch de longueur  $l$ , d'échelle  $l^{-p}$ , de souplesse  $\leq \psi$  et de maille  $(a_0, K, a_1)$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f_T$  l'application de  $D^l$  dans  $\mathbb{R}^n$  qu'elle définit (voir 3.2).

Alors  $f_T$  est un plongement Lipschitzien de  $(D^l, \| \cdot \|^p)$  dans  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ .

Plus précisément, soient  $A_T$  et  $B_T$  les quantités définies en 3.6 d; on a alors

$$A_T |x - y|^p \sin \left( \psi \vee \frac{\pi}{2} \right) \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq 2B_T l^p |x - y|^p,$$

quels que soient  $x, y \in D^l$ .

Démonstration. — Soient  $x, y \in D^l$  (avec  $x < y$ ) et soit  $j$  l'entier  $\geq 0$  vérifiant  $l^{-(j+1)} < |x - y| \leq l^{-j}$ . On distingue deux cas :

(a) Si  $]x, y[$  ne contient aucun élément de  $D_j^j$ , on a

$$A_T l^{-jp} \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq B_T l^{-jp}$$

(voir 3.6 e) et donc

$$A_T |x - y|^p \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq B_T l^p |x - y|^p.$$

(b) Sinon,  $]x, y[$  contient un unique élément  $a$  de  $D_j^j$ ; quitte à remplacer  $T$  par la chaîne opposée, on peut supposer qu'on a  $\frac{1}{2} l^{-(j+1)} < |x - a| \leq l^{-j}$  et  $|a - y| \leq l^{-j}$ ; on a donc

$$\begin{aligned} \|f_T(x) - f_T(a)\| \sin \left( \psi \vee \frac{\pi}{2} \right) &\leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \\ &\leq \|f_T(x) - f_T(a)\| + \|f_T(a) - f_T(y)\| \end{aligned}$$

(la première inégalité tenant à ce que la chaîne  $T$  est de souplesse  $\leq \psi$ ; voir 3.1 d); on a donc  $A_T l^{-jp} \sin\left(\psi \vee \frac{\pi}{2}\right) \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq 2B_T l^{-jp}$  (voir 3.6 e), ce qui implique

$$A_T |x - y|^p \sin\left(\psi \vee \frac{\pi}{2}\right) \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq 2B_T l^p |x - y|^p. \quad \square$$

#### 4. Rang de l'espace $([0, 1]^k, \|\cdot\|^p)$

4.1. (a) Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On appelle *rang de  $(X, d)$*  (et on note  $\text{rg}(X, d)$ ) le plus petit entier  $n \geq 0$  tel qu'il existe un plongement Lipschitzien de  $(X, d)$  dans l'espace Euclidien  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ .

(b) Soit  $f$  un plongement Lipschitzien de  $(X, d)$  dans l'espace métrique  $(Y, \delta)$ ; on appelle *distorsion de  $f$*  (et on note  $\Delta(f)$ ) la borne inférieure des nombres réels  $\lambda$  tels qu'il existe  $A \in ]0, +\infty[$  pour lequel on ait  $Ad(x, y) \leq \delta(f(x), f(y)) \leq A e^\lambda d(x, y)$ , quels que soient  $x, y \in X$ .

(c) Si  $n$  est un entier  $\geq \text{rg}(X, d)$ , on appelle  *$n$ -distorsion de  $(X, d)$*  (et on note  $\Delta_n(X, d)$ ) la borne inférieure de  $\Delta(f)$  pour tous les plongements Lipschitziens  $f$  de  $(X, d)$  dans l'espace Euclidien  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ .

Nous n'essayerons pas ici d'évaluer la  $n$ -distorsion de  $([0, 1]^k, \|\cdot\|^p)$ ; indiquons cependant quelles questions se posent à ce propos.

4.2. Si  $(X, d)$  se plonge isométriquement, c'est-à-dire avec distorsion 0, dans un espace de Hilbert de dimension infinie (ce qui est le cas de l'espace  $([0, 1]^k, \|\cdot\|^p)$ ), alors on peut s'attendre à ce que la  $n$ -distorsion de  $(X, d)$  tende vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ainsi Kahane [6] a montré, en réponse à une question de l'auteur, que la  $n$ -distorsion de  $([0, 1], \sqrt{\|\cdot\|})$  est inférieure ou égale à  $0\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Par contre, nous allons évaluer assez précisément le rang de  $([0, 1]^k, \|\cdot\|^p)$ . Voici d'abord quelques remarques préliminaires évidentes :

4.3. (a) Soient  $d$  et  $\delta$  deux distances sur un ensemble  $X$ . On suppose que l'identité est un plongement Lipschitzien de  $(X, d)$  dans  $(X, \delta)$  (on dit dans ce cas que  $d$  et  $\delta$  sont *Lipschitz équivalentes*). Alors  $(X, d)$  et  $(X, \delta)$  ont même rang.

(b) Soient  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  deux espaces métriques. On munit  $X \times Y$  de la distance somme directe  $d \oplus \delta : (x, y), (x', y') \rightarrow d(x, x') + \delta(y, y')$ . Le rang de  $(X \times Y, d \oplus \delta)$  est alors inférieur ou égal à  $\text{rg}(X, d) + \text{rg}(Y, \delta)$ .

(c) Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On a alors  $\text{Dim}(X, d) \leq \text{rg}(X, d)$ .

Résumons maintenant les résultats obtenus au paragraphe 3 :

4.4. PROPOSITION. — Soient  $k$  un entier  $\geq 1$  et  $p$  un élément de  $]0, 1[$ . Soit  $n$  le plus petit entier  $> \frac{1}{p}$ . Alors l'espace  $([0, 1]^k, \| \cdot \|^p)$  est de rang  $\leq kn$ .

Démonstration. — (a) On a montré, en 3.6, l'existence d'un entier  $l \geq 2$  et d'une chaîne de Von Koch de longueur  $l$ , d'échelle  $l^{-p}$  et de souplesse  $\leq \frac{3\pi}{4}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Il en résulte qu'il existe (voir 3.8) un plongement Lipschitzien de  $(D^l, \| \cdot \|^p)$  dans  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ . Prolongeant ce plongement par continuité, on obtient un plongement Lipschitzien de  $([0, 1], \| \cdot \|^p)$  dans  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ . Donc l'espace  $([0, 1], \| \cdot \|^p)$  est de rang  $\leq n$ .

(b) Notons  $d$  (resp.  $\delta$ ) la distance  $x, y \rightarrow \|x - y\|^p$  sur  $[0, 1]^k$  (resp. sur  $[0, 1]$ ). La distance  $d$  est Lipschitz équivalente à  $\delta \oplus \dots \oplus \delta$  ( $k$  fois). La remarque 4.3 b montre donc que  $([0, 1]^k, \| \cdot \|^p)$  est de rang  $\leq nk$ .  $\square$

4.5. Il résulte de 2.2 que la dimension métrique de  $([0, 1]^k, \| \cdot \|^p)$  est égale à  $\frac{k}{p}$ . En tenant compte de 4.3 c, on voit que  $([0, 1]^k, \| \cdot \|^p)$  est de rang  $\geq \frac{k}{p}$ .

Le rang de  $([0, 1], \| \cdot \|^p)$  (pour  $p \in ]0, 1[$ ) est donc le plus petit entier  $> \frac{1}{p}$ , dès que  $\frac{1}{p}$  n'est pas entier. Nous nous proposons de montrer que ce résultat subsiste même si  $\frac{1}{p}$  est entier (différent de 1). Plus généralement, nous allons établir que  $([0, 1]^k, \| \cdot \|^p)$  est de rang  $> \frac{k}{p}$ , quels que soient  $k$  entier  $\geq 1$  et  $p \in ]0, 1[$ .

Cela va résulter de trois lemmes.

4.6. (a) Un noyau symétrique  $d : X^2 \rightarrow ]0, +\infty[$  nul sur et seulement sur la diagonale est appelé une *pseudodistance* sur  $X$  s'il existe un nombre  $a \in [1, +\infty[$  tel qu'on ait  $d(x, y) \leq a(d(x, z) + d(z, y))$  quels que soient  $x, y, z \in X$  (lorsqu'on veut être plus précis, on dit que  $d$  est une *a-pseudodistance* sur  $X$ ). On munit alors l'espace  $(X, d)$ , qu'on appelle un *espace*

*pseudométrique*, de la topologie engendrée par les boules « ouvertes » relatives à la pseudodistance  $d$ .

(b) Soit  $(X, d)$  un espace pseudométrique; pour chaque ouvert  $U$  de  $(X, d)$ , on note  $\tau(U)$  le *diamètre de*  $(U, d)$ , c'est-à-dire la quantité  $\text{Sup} \{d(u, v) \mid u, v \in U\}$ . On définit alors une mesure extérieure  $\mu_d$  sur  $X$  de la façon suivante : pour chaque partie  $A$  de  $X$  et chaque  $\varepsilon > 0$ , on pose

$$\mu_{d,\varepsilon}(A) = \text{Inf} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \tau(U_i) \mid (U_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ recouvrement de } A \text{ par des ouverts de diamètre } \leq \varepsilon \right\}.$$

$$\mu_d(A) = \text{Sup}_{\varepsilon > 0} \mu_{d,\varepsilon}(A)$$

(la mesure  $\mu_d$  est donc la mesure extérieure sur  $X$  obtenue par la méthode II de Rogers [8] p. 27 à partir de la prémessure  $\tau$ ).

Nous dirons que  $\mu_d$  est la *mesure de Hausdorff* sur  $(X, d)$ .

4.7. LEMME. — Soient  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  deux espaces pseudométriques; soient  $A, B \in ]0, +\infty[$ . Soit  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$  vérifiant  $A d(x, x') \leq \delta(f(x), f(x')) \leq B d(x, x')$  quels que soient  $x, x' \in X$ . On a alors  $A \mu_d(X) \leq \mu_\delta(f(X)) \leq B \mu_d(X)$ .

*Démonstration.* — Lorsque  $d$  et  $\delta$  sont des distances, c'est un cas particulier du Théorème 29 de [8]. De plus la démonstration de ce théorème reste évidemment valable (voir [8] p. 54) même si  $d$  et  $\delta$  ne sont pas des distances.  $\square$

4.8. Toute puissance d'une distance est une pseudodistance; par ailleurs on peut montrer ([1] Lemme 1.14) que toute pseudodistance est Lipschitz équivalente à une puissance d'une distance.

4.9. LEMME. — Soient  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  deux espaces métriques,  $x_0$  un point de  $X$  et  $y_0$  un point de  $Y$ ; soient  $A, B \in ]0, +\infty[$ . On suppose que les boules fermées de  $(Y, \delta)$  sont compactes et qu'il existe, pour chaque partie finie  $F$  de  $X$  contenant  $x_0$ , un plongement  $(A, B)$ -Lipschitzien  $g_F$  de  $(F, d)$  dans  $(Y, \delta)$  vérifiant  $g_F(x_0) = y_0$ . Il existe alors un plongement  $(A, B)$ -Lipschitzien de  $(X, d)$  dans  $(Y, \delta)$ .

*Démonstration.* — Pour chaque partie finie  $F$  de  $X$  contenant  $x_0$ , on définit une application  $f_F$  de  $X$  dans  $Y$  en posant  $f_F(x) = g_F(x)$  si  $x$  appartient à  $F$ , et  $f_F(x) = y_0$  sinon. On pose alors  $f(x) = \lim_{F, \mathcal{U}} f_F(x)$  (pour chaque  $x \in X$ ), où  $\mathcal{U}$  est un ultrafiltre plus fin que le filtre de l'inclusion sur l'ensemble de toutes les parties finies de  $X$  contenant  $x_0$  (on observe que  $f_F(x)$  est, quel que soit  $F$ , un

élément de la boule fermée de centre  $y_0$  et de rayon  $B d(x_0, x)$ ; c'est la compacité de cette boule qui assure l'existence de  $f(x)$ .

L'application  $f$  est le plongement cherché.  $\square$

4.10. Soit  $\varepsilon \in ]0, +\infty[$ . Une partie  $T$  d'un espace métrique  $(X, d)$  est dite  $\varepsilon$ -dense dans  $(X, d)$  si, pour chaque  $x \in X$ , il existe  $t \in T$  avec  $d(x, t) < \varepsilon$ .

4.11. LEMME. — Soient  $F$  une partie  $\alpha$ -discernable et  $G$  une partie  $\varepsilon$ -dense d'un espace métrique  $(X, d)$ . Il existe alors une application  $h : F \rightarrow G$  vérifiant  $\left(1 - \frac{2\varepsilon}{\alpha}\right) d(x, y) \leq \delta(h(x), h(y)) \leq \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\alpha}\right) d(x, y)$ , quels que soient  $x, y \in F$ .

Démonstration. — Comme  $G$  est  $\varepsilon$ -dense, on peut choisir, pour chaque  $x \in F$ , un point  $h(x)$  de  $G$  avec  $d(x, h(x)) < \varepsilon$ . Fixons  $x, y \in F$  (avec  $x \neq y$ ); on a alors :

$$\begin{aligned} d(h(x), h(y)) &\leq d(x, y) + d(x, h(x)) + d(y, h(y)) \\ &\leq d(x, y) + 2\varepsilon \leq \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\alpha}\right) d(x, y) \end{aligned}$$

et 
$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(h(x), h(y)) + d(x, h(x)) + d(y, h(y)) \\ &\leq d(h(x), h(y)) + \frac{2\varepsilon}{\alpha} d(x, y). \end{aligned}$$

L'application  $h$  est donc l'application cherchée.  $\square$

Voici maintenant le résultat que nous avons en vue :

4.12. PROPOSITION. — Soient  $k$  un entier  $\geq 1$  et  $p$  un élément de  $]0, 1[$ . Notons  $r(k, p)$  le rang de l'espace métrique  $([0, 1]^k, \|\cdot\|^p)$ . On a alors  $m \leq r(k, p) \leq kn$ , où  $m$  est le plus petit entier  $> \frac{k}{p}$ , et  $n$  le plus petit entier  $> \frac{1}{p}$ .

En particulier le rang de  $([0, 1], \|\cdot\|^p)$  est le plus petit entier  $> \frac{1}{p}$ .

Démonstration. — (a) On a déjà démontré les inégalités  $r(k, p) \leq kn$  (voir 4.4) et  $r(k, p) \geq \frac{k}{p}$  (voir 4.5). Il nous reste donc à établir l'inégalité

$r(k, p) > \frac{k}{p}$ , dans le cas où  $\frac{k}{p}$  est un entier.

(b) Pour cela, on va supposer qu'il existe un plongement  $f$   $(A, B)$ -Lipschitzien de  $([0, 2]^k, \|\cdot\|^p)$  dans  $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|)$  (avec  $\frac{k}{p} = q \in \mathbb{N}$ ) et montrer que cela entraîne une contradiction; cela établira la Proposition.

(c) Soit  $f$  le plongement dont nous avons supposé l'existence en (b). On a donc  $A^q \|x - y\|^k \leq \|f(x) - f(y)\|^q \leq B^q \|x - y\|^k$ , quels que soient  $x, y \in [0, 2]^k$ . Le lemme 4.7 (appliqué aux pseudodistances  $d : x, y \rightarrow \|x - y\|^k$  sur  $[0, 2]^k$  et  $\delta : s, t \rightarrow \|s - t\|^q$  sur  $\mathbb{R}^q$ ) implique que l'ensemble  $f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]^k\right)$  est de mesure de Lebesgue non nulle dans  $\mathbb{R}^q$  et possède donc (par le théorème de dérivation de Lebesgue) un point de densité  $t_0 = f(x_0)$ .

(d) Pour chaque  $\beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$  et chaque  $x \in [-1, 1]^k$ , on pose

$$f_\beta(x) = \beta^{-p}(f(x_0 + \beta x) - f(x_0)).$$

Pour chaque  $\beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$  l'application  $f_\beta$  ainsi définie est un plongement  $(A, B)$ -Lipschitzien de  $([-1, 1]^k, \|\cdot\|^p)$  dans  $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|)$  et on a :

$$\begin{aligned} \beta^k \lambda(f_\beta([-1, 1]^k) \cap S(O, A)) \\ = \lambda(f(x_0 + \beta[-1, 1]^k) \cap S(t_0, A\beta^p)) \geq \lambda(f([0, 2]^k) \cap S(t_0, A\beta^p)) \end{aligned}$$

(en notant  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^q$  et  $S(z, r)$  la boule fermée de centre  $z$  et de rayon  $r$  dans l'espace  $(\mathbb{R}^q, \|\cdot\|)$ ).

(e) Comme  $t_0$  est un point de densité de  $f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]^k\right)$ , l'inégalité que nous avons établie en (d) montre qu'on a

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \lambda(f_\beta([-1, 1]^k) \cap S(O, A)) = \lambda(S(O, A)).$$

On peut donc choisir, pour chaque  $\varepsilon > 0$ , un nombre  $\beta(\varepsilon) \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$  tel que  $G_\varepsilon = f_{\beta(\varepsilon)}([-1, 1]^k) \cap S(O, A)$  soit  $\varepsilon$ -dense dans l'espace  $(S(O, A), \|\cdot\|)$ .

De plus  $g_\varepsilon = f_{\beta(\varepsilon)}^{-1}$  est un plongement  $\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{A}\right)$ -Lipschitzien de l'espace  $(G_\varepsilon, \|\cdot\|)$  dans l'espace  $([-1, 1]^k, \|\cdot\|^p)$ .

(f) Soit  $F$  une partie finie de  $S(O, A)$  contenant 0; il existe donc  $\alpha > 0$  tel que  $F$  soit  $\alpha$ -discernable dans  $(S(O, A), \|\cdot\|)$ . On fixe  $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$ . Il existe donc (par

le Lemme 4.11) un plongement  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ -Lipschitzien  $h_F$  de  $(F, \|\cdot\|)$  dans

$(G_\varepsilon, \|\cdot\|)$ , et on peut supposer  $h_F(0) = 0$  (car 0 appartient à  $G_\varepsilon$ ). L'application  $g_F = g_\varepsilon \circ h_F$  est donc un plongement  $\left(\frac{1}{2B}, \frac{3}{2A}\right)$ -Lipschitzien de l'espace  $(F, \|\cdot\|)$  dans l'espace  $([-1, 1]^k, \|\cdot\|^p)$ , et elle vérifie  $g_F(0) = 0$ .

(g) Il existe donc (par le Lemme 4.9) un plongement  $\left(\frac{1}{2B}, \frac{3}{2A}\right)$ -Lipschitzien de l'espace  $(S(O, A), \|\cdot\|)$  dans l'espace  $([-1, 1]^k, \|\cdot\|^p)$ , en contradiction avec le fait que la dimension topologique de  $S(O, A)$  est égale à  $q > k$ . C'est la contradiction cherchée.  $\square$

L'inégalité  $r\left(1, \frac{1}{2}\right) > 2$  aurait pu être démontrée en utilisant le résultat suivant de Besicovitch et Schoenberg :

4.13. [2] Soit  $f$  une application injective et continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On a alors  $\text{Inf} \left\{ \sum_{i=1}^j \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|^2 \right\} = 0$ , où la borne inférieure est prise sur toutes les partitions  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{j-1} < x_j = 1$  du segment  $[0, 1]$ .

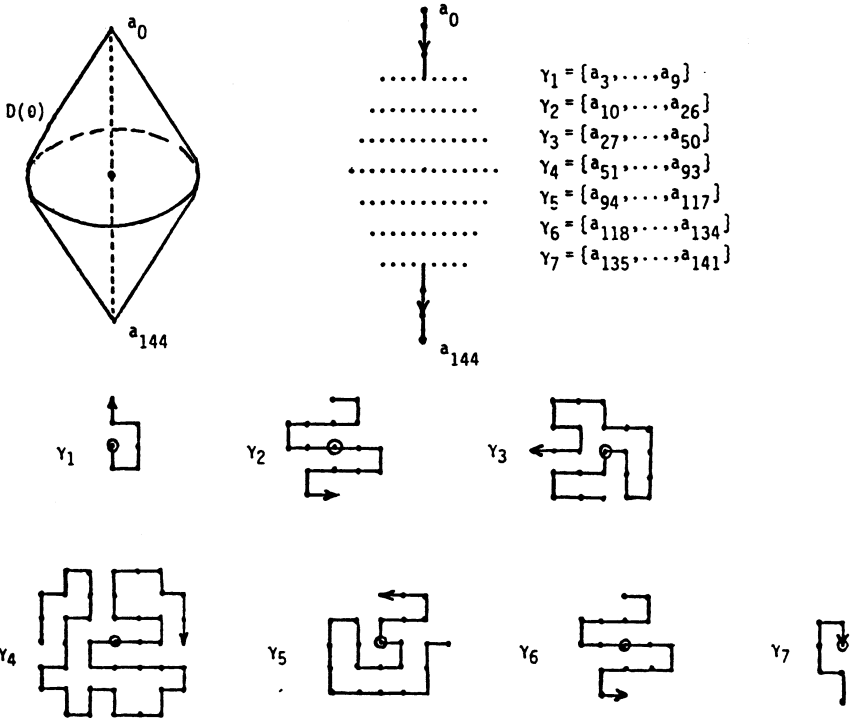
De même l'inégalité  $r\left(1, \frac{1}{q}\right) > q$  pourrait être établie en utilisant une extension (due à Y. Katznelson, non publiée) de 4.13 aux courbes de Jordan  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^q$ , la  $q$ -variation remplaçant alors la 2-variation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASSOUD (P.). — Espaces métriques, plongements, facteurs, Thèse (Orsay, 1977).  
 [2] BESICOVITCH (A. S.), SCHOENBERG (I.J.). — On Jordan arcs and Lipschitz classes of functions defined on them, Acta Math. 106 (1961), 113-136.  
 [3] BOULIGAND (G.). — Ensembles impropres et ordre dimensionnel, Bull. Sci. Math. 52 (1928), 320-344 et 361-376.  
 [4] BROOKS (R. L.). — On colouring the nodes of a network, Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941), 194-197.  
 [5] GLAESER (G.). — Étude de quelques algèbres tayloriennes, J. Analyse Math. 6 (1958), 1-124.  
 [6] KAHANE (J. P.). — Hélices et quasi-hélices, Math. Analysis and Appl. (L. Nachbin ed.), 417-433, Academic Press, 1981, New York.  
 [7] Von KOCH (H.). — Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, Acta Math. 30 (1906), 145-174.  
 [8] ROGERS (C. A.). — Hausdorff measures, Cambridge University Press (1970).

**APPENDICE.** Une chaîne conduisant à un plongement de  $([0, 1], \sqrt{\|\cdot\|})$  dans  $\mathbb{R}^3$  :

Soit  $\theta = \text{Arctg } \frac{2}{3}$ ; on considère une chaîne de Von Koch  $T$  de longueur 144, d'échelle  $\frac{1}{12}$ , de souplesse  $\leq \frac{\pi}{2} + 2\theta$  et de maille  $(a_0, D(\theta), a_{144})$  dans  $\mathbb{R}^3$ , dont le support  $(a_0, K_0, a_1, \dots, a_{143}, K_{143}, a_{144})$  soit donné par le schéma suivant :



Un calcul grossier (à la main) montre qu'il existe alors un nombre réel  $A > 0$  tel qu'on ait  $A \sqrt{|s - t|} \leq \|f_T(s) - f_T(t)\| \leq 2184A \sqrt{|s - t|}$ , quels que soient  $s, t \in [0, 1]$ .